UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

E.A.P. DE MATEMÁTICA

Completitud y clausura algebraica de campos P-ádicos

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática

AUTOR

Jorge Luis Rojas Orbegoso

Lima - Perú

2016

Índice general

Introducción

Durante el siglo pasado, los números p-ádicos y el análisis p-ádico han desempeñado un papel importante en la teoría moderna de números. Su importancia radica en como permite expresar de manera natural las congruencias entre números enteros en términos de distancias, de esta manera podemos usar métodos del análisis para estudiar problemas de congruencias. Por ejemplo,

$$a \in \mathbb{Z} : \quad |a|_p \leq p^{-k} \iff p^k \text{ divide a } a.$$

Se puede decir que mientras más cerca está a de 0 (en la topología p-ádica), más alta es la potencia de p que divide a a.

Hay varias formas de abordar el estudio de los números p-ádicos. Una es la forma original como nacieron, como series de Laurent, que es la forma más antigua. Otra forma es usando límites proyectivos. Otra forma más, que será la forma que estudiemos en este trabajo, es usando la teoría de valores absolutos. Esta última forma es a mi parecer la mejor, ya que permite ver a los números p-ádicos en analogía directa con los números reales. Para graficar esto, usando la métrica inducida por el valor absoluto usual en $\mathbb{Q}$ tenemos las construcciones:

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{\text{compleción}} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{clausura algebraica}} \mathbb{C}.$$

En este trabajo repetiremos este proceso, pero, usando el valor absoluto p-ádico. Este trabajo se basa en [8], en apoyo con [6], [9] y [10].

Veamos un poco de historia. Los números p-ádicos $\mathbb{Q}_p$, fueron introducidos por Kurt Hensel en 1987, donde los describe como series de potencias de Laurent, en analogía, como el mismo dice apenas iniciado su trabajo, entre los resultados de la teoría de funciones algebraicas en una variable y de los números algebraicos.

En 1910, Ernst Steinitz publicó su trabajo fundamental sobre teoría de campos, citando a los números p-ádicos como su mayor motivación. En ese mismo año, gracias a los trabajos de Maurice Fréchet, Frigyes Riesz y otros, las ideas topológicas se vuelven mas claras, esto permite tener un mejor entendimiento de los números p-ádicos.

En 1912, Kürschák define los valores absolutos, esta nueva definición permite interpretar $\mathbb{Q}_p$ en términos de espacios métricos y topológicos. Hensel, a su vez, realizó varios trabajos y libros, en los que simplificó las teoría de divisibilidad en números algebraicos usando los números p-ádicos. Sin embargo, Hensel no uso la definición de Kürschák sobre valuaciones, pero introdujo límites y probó la completitud de $\mathbb{Q}_p$ sin mencionar las valuaciones. En 1917, Ostrowski da el teorema de valores absolutos en $\mathbb{Q}$.

En 1921, Helmut Hasse en su tesis doctoral propone y prueba el Principio Local-Global para la representacion de un número racional por una forma cuadrática con coeficientes en $\mathbb{Q}$, en otras palabras: Sea $a \in \mathbb{Q}$ y $f \in \mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ una forma cuadrática, entonces la afirmación "existen $x_1, \ldots, x_n$ tal que $a = f(x_1, \ldots, x_n)$" se tiene en $\mathbb{Q}$ si y solamente si se tiene en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$ para cada $p \in \mathbb{Z}$ primo.

Durante los años 1920 a 1935, se desarrolla la teoría completa de valores absolutos, gracias a los aporte de Deuring, Schmidt, Krull, etc.

Actualmente, los números p-ádicos son utilizados en muchas áreas de la matemática, como son teoría de números, geometría algebraica, topología algebraica, análisis funcional, ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos. También son utilizados en física.

Este trabajo está estructurado en tres capítulos. El capítulo 1 se centra en la definición de valor absoluto y cuerpo valuado, demostración de sus propiedades y consecuencias. Nos apoyaremos en conceptos topológicos y algebraicos.

En el capítulo 2, nos centraremos en el objetivo central, construir campos de extensión de $\mathbb{Q}$ usando los valores absolutos p-ádicos y para cada campo construído responderemos a las siguientes preguntas: ¿es algebraicamente cerrado?, ¿es completo?, ¿es esféricamente completo?, ¿es localmente compacto?, ¿qué cardinal tiene?, ¿es segundo numerable?, ¿cuál es un subconjunto numerable denso?.

En el capítulo 3, resumiremos los resultados principales, además de realizar observaciones a algunos resultados probados a lo largo del trabajo.

La completitud juega un rol muy importante en el estudio de espacio normados reales y complejos, esto es, el análisis real arquimediano. Esféricamente completo es una condición mas fuerte que completo. Campos esféricamente completos son importantes para el análisis funcional no-arquimediano. Por ejemplo, la prueba del teorema de Hahn-Banach requiere la propiedad esféricamente completos. Los campos $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ además de ser completos, son también esféricamente completos. La clausura algebraica es una herramienta muy útil en el estudio de campos ya que, al estudiar un campo y sus extensiones finitas, no da un ambiente en el cual poder trabajar libremente con las soluciones de polinomios. Segundo numerable o separabilidad (equivalente en espacios métricos) es una propiedad requerida, por ejemplo, para el estudio de variedades diferenciales o en la existencia de base de Schauder. Los espacios localmente compactos son abiertos de un espacio compacto (compactificación de Alexandroff o por un punto) y los espacios compactos están presentes en casi toda la matemática. Finalmente, la cardinalidad es una pregunta propia, al querer saber que tan grandes son estos conjuntos.

A lo largo del trabajo supondremos que el lector cuenta con una formación sólida en los tema necesarios, como son: teoría de conjuntos [2], álgebra lineal [5], análisis real, álgebra abstracta [4, 7], espacios métricos [1], espacios topológicos [1].

Capítulo 1

Preliminares

El objetivo principal de este capítulo será, dado un campo valuado, la obtención de valores absolutos en su compleción y en su clausura algebraica. En la última sección estudiaremos brevemente la propiedad esféricamente completo, que será de utilidad al final de este trabajo. Los resultados y demostraciones presentados son de [6], [8] y [9].

1.1 Espacios ultramétricos

En esta sección definiremos los espacios ultramétricos y probaremos propiedades básicas sobre la topología en estos espacios suficientes para este trabajo. Denotaremos las bolas abiertas, bolas cerradas y esferas de centro x y radio r como $B(x, r)$, $B[x, r]$ y $S(x, r)$. También donotaremos las secuencias como $(x_n)_n$ suponiendo que n varía en $\mathbb{Z}^+$, así como su límite será denotado simplemente como $\lim_n x_n$.

Definición 1.1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. La métrica d es llamada ultramétrica si cumple

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \ \forall x, y, z \in X,$$

llamada desigualdad triangular fuerte. En este caso, el espacio (X, d) es llamado espacio ultramétrico.

Observación 1.1.1. La desigualdad triangular fuerte implica la desigualdad triangular, ya que si $A, B \geq 0$ entonces $\max\{A, B\} \leq A + B$.

Ejemplo 1.1.1. Dado un conjunto X. La función

$$\begin{array}{rccl} d : & X \times X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & d(x, y) = \begin{cases} 0 & , \ x = y \\ 1 & , \ x \neq y \end{cases} \end{array}$$

es una ultramétrica en X, y por ende una métrica en X. Esta métrica es llamada la métrica cero-uno en X.

Proposición 1.1.1 (Principio del triángulo isósceles). *Sean $x, y, z \in X$.*

a) Si $d(x,z) > d(z,y)$, entonces $d(x,y) = d(x,z)$.

b) Si $d(x,y) \neq d(y,z)$ entonces $d(x,z) = \max\{d(x,y), d(y,z)\}$.

Demostración. Sean $x, y, z \in X$.

a) Por hipótesis

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\} = d(x,z)$$

No podemos tener que $\max\{d(x,y), d(z,y)\} = d(z,y)$ ya que en caso contrario

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\} = d(y,z),$$

contradiciendo así la hipótesis. Entonces debemos tener

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\} = d(x,y).$$

Hemos probado así la igualdad pedida.

b) Como $d(x,y) \neq d(y,z)$, se tiene $d(x,y) > d(y,z)$ o $d(x,y) < d(y,z)$. Por el item anterior, $d(x,z) = d(x,y)$ o $d(x,z) = d(y,z)$. En cualquier caso, $d(x,z)$ es exactamente el máximo de $d(x,y)$ y $d(y,z)$. $\square$

Proposición 1.1.2. *Sea (X,d) un espacio ultramétrico. Supongamos que todos los radios considerados sean positivos. Se cumple:*

a) $S(x,r) = \bigcup_{y \in S(x,r)} B(y,r)$;

b) todas las bolas abiertas, bolas cerradas y esferas son conjuntos abiertos y cerrados a la vez;

c) cada punto de la bola es el centro de la bola con el mismo radio;

d) dadas dos bolas B_1, B_2 entonces $B_1 \subseteq B_2$, $B_2 \subseteq B_1$ o B_1 y B_2 son conjuntos disjuntos;

e) X es totalmente disconexo.

Notemos que el item a) no es cierto para $r = 0$, ya que en el lado derecho de la igualdad obtenemos un conjunto unitario y en el lado izquierdo obtenemos el conjunto vacío.

Demostración.

a) La inclusión $S(x,r) \subseteq \bigcup_{y \in S(x,r)} B(y,r)$ es inmediato. Recíprocamente, dado $z \in B(y,r)$ para algún $y \in S(x,r)$. Tenemos, $d(y,z) < r$ y $d(x,y) = r$, por la proposición 1.1.1,

$$d(x,z) = \max\{d(x,y), d(y,z)\} = r.$$

Esto significa, $z \in S(x,r)$. Se sigue la igualdad pedida.

b) Se sabe que las bolas abiertas son conjuntos abiertos y las bolas cerradas y esferas son conjuntos cerrados. Vamos a probar lo que falta.

Esferas: El item anterior muestra que toda esfera es unión de conjuntos abiertos, entonces las esferas son también conjuntos abiertos.

Bolas cerradas: La expresión, $B[x,r] = B(x,r) \cup S(x,r)$, muestra a $B[x,r]$ como unión de conjuntos abiertos. Entonces toda bola cerrada es un conjunto abierto.

Bolas abiertas: La expresión, $B(x,r) = B[x,r] \setminus S(x,r)$, muestra a $B(x,r)$ como diferencia de un conjunto cerrado y un conjunto abierto. Entonces toda bola abierta es un conjunto cerrado.

c) Sea $y \in B(x,r)$ arbitrario. Para probar que y es centro de $B(x,r)$ con radio r, debemos probar que $B(x,r) = B(y,r)$. En efecto, ya que $d(x,y) < r$ tenemos

$$z \in B(x,r) \Longrightarrow d(z,x) < r \Longrightarrow d(z,y) \leq \max\{d(z,x), d(x,y)\} < r \Longrightarrow z \in B(y,r),$$

de donde $B(x,r) \subseteq B(y,r)$. De igual manera $B(y,r) \subseteq B(x,r)$. Esto prueba la igualdad pedida.

Similarmente, $B[x,r] = B[y,r]\ \forall y \in B[x,r]$.

d) Supongamos que B_1 y B_2 no son disjuntos. Luego, existe $z \in B_1 \cap B_2$. Por el item anterior, tendríamos que z es centro de B_1 y B_2 simultáneamente. Por la comparabilidad en $\mathbb{R}$, analizando los radios tendríamos lo pedido.

e) Como todo subespacio de un espacio ultramétrico es también ultramétrico, basta probar que un espacio ultramétrico con más de dos elementos no es conexo. Sean $x, y \in X$ diferentes, por los items anteriores tenemos la unión disjunta de conjuntos abiertos no vacíos

$$X = B\left[x, \frac{d(x,y)}{2}\right] \cup \left(X \backslash B\left[x, \frac{d(x,y)}{2}\right]\right).$$

Esto prueba que X no es conexo. $\square$

Proposición 1.1.3. *Sea* $(x_n)_n$ *una secuencia en un espacio ultramétrico* (X, d)*. Entonces,* $(x_n)_n$ *una secuencia de Cauchy, si y solamente si,* $\lim_n d(x_n, x_{n+1}) = 0$*.*

Demostración.

$\Rightarrow$) De la definición de secuencia de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon \ \forall n, m \geq N$. Haciendo $m = n + 1$, se tiene $\lim_n d(x_n, x_{n+1}) = 0$.

$\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon \ \forall n \geq N$. Sea $m > n$ en $\mathbb{Z}^+$, de la desigualdad triangular fuerte y $d(x_n, x_{n+1}) < \epsilon \ \forall n \geq N$, tenemos

$$d(x_n, x_m) \leq \max\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, x_{n+2}), \ldots, d(x_{m-1}, x_m)\} < \epsilon \quad \forall m > n \geq N.$$

Se sigue que $(x_n)_n$ es una secuencia de Cauchy. $\square$

1.2 Valores absolutos en campos

En esta sección definiremos valor absoluto en un campo, probaremos que induce una métrica y probaremos propiedades relacionadas a la topología inducida por esta métrica. Dado un $\mathbb{K}$ campo, a lo largo de este trabajo $\mathbb{K}^*$ denotará al conjunto $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ y $[0, \infty)$ el conjunto de números reales no negativos.

Definición 1.2.1. Sea $\mathbb{K}$ un campo, diremos que la función $|\cdot| : \mathbb{K} \longrightarrow [0, +\infty)$ es un valor absoluto en $\mathbb{K}$ si:

i) $|x| = 0 \iff x = 0$,

ii) $|xy| = |x||y| \ \forall x, y \in \mathbb{K}$,

iii) $|x + y| \leq |x| + |y| \ \forall x, y \in \mathbb{K}$.

Diremos que el valor absoluto $|\cdot|$ es ultramétrico si además cumple

iv) $|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\}$,

El par $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ será dicho campo valuado. El campo valuado es dicho campo ultramétrico si su valor absoluto es ultramétrico.

Observación 1.2.1. Ya que para $A, B \geq 0$ se tiene $\max\{A, B\} \leq A + B$, entonces iv implica iii.

Ejemplo 1.2.1. Todo campo $\mathbb{K}$ posee un valor absoluto (ultramétrico), definido como

$$\begin{array}{rcl} |\cdot| : \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| = \begin{cases} 0 & , \text{ si } x = 0 \\ 1 & , \text{ si } x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

llamado valor absoluto trivial. La métrica inducida es la métrica cero-uno en $\mathbb{K}$.

Ejemplo 1.2.2. Dado $p \in \mathbb{Z}^+$ primo, definimos

$$\begin{array}{rcl} |\cdot|_p : \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x|_p = \begin{cases} 0 & , \ x = 0 \\ p^{-n} & , \ x = p^n \dfrac{a}{b}, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, a, b \in \mathbb{Z} \text{ no divisibles por } p \end{cases} \end{array}$$

es bien definido y es un valor absoluto ultramétrico en $\mathbb{Q}$, llamado valor absoluto p-ádico.

El valor absoluto p-ádico será el punto de inicio de nuestro trabajo en el capítulo 2.

Ejemplo 1.2.3. Sea $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. El valor absoluto usual en $\mathbb{K}$ es un valor absoluto.

Proposición 1.2.1. *Sea* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *un campo valuado, la función*

$$\begin{array}{rcccc} d & : & \mathbb{K}\times\mathbb{K} & \longrightarrow & [0,+\infty) \\ & & (x,y) & \longmapsto & |x-y| \end{array}$$

es una métrica, llamada métrica inducida por $|\cdot|$. *Si* $|\cdot|$ *es ultramétrico, entonces* d *es una ultramétrica.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{K}$.

i) $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$.

ii) $d(x,y) = |x-y| = |-(x-y)| = |y-x| = d(y,x)$.

iii) $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-y| + |z-y| = d(x,y) + d(z,y)$. Hasta aquí, hemos probado que d es una métrica

iv) Ahora, supongamos que $|\cdot|$ es ultramétrico, entonces

$$d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq \max\{|x-y|, |z-y|\} = \max\{d(x,z), d(z,y)\}.$$

Esto prueba que d es ultramétrica. □

De esta manera vemos un campo valuado como un espacio métrico de forma natural, así tenemos sobre campos valuados las nociones de topología, convergencia de secuencias, secuencia de Cauchy, compacidad, conexidad, completitud, funciones continuas, etc. Diremos que un campo valuado tiene una propiedad métrica si tiene tal propiedad visto como espacio métrico. Por ejemplo, diremos que un campo es completo si es completo como espacio métrico.

Proposición 1.2.2. *En un campo valuado* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *se cumple: Dados* $x, y \in \mathbb{K}, z \in \mathbb{K}^*$, $(x_n)_n, (y_n)_n$ *secuencias en* $\mathbb{K}$, $(z_n)_n$ *secuencia en* $\mathbb{K}^*$, *a)* $|1| = 1$, $|-x| = |x|$, $|z^{-1}| = |z|^{-1}$;

b) $||x| - |y|| \leq |x - y|$;

c) si $\mathbb{K}$ *un campo ultramétrico y* $|x| \neq |y|$, *entonces* $|x + y| = \max\{|x|, |y|\}$.

d) si $\lim_n x_n = x$, $\lim_n y_n = y$, $\lim_n z_n = z$, *entonces*

$$\lim_n (x_n + y_n) = x + y, \ \lim_n (x_n y_n) = xy, \ \lim z_n^{-1} = z^{-1},$$

e) si $(x_n)_n, (y_n)_n, (z_n)_n$ *son secuencias de Cauchy, entonces* $(x_n + y_n)_n, (x_n y_n)_n, (1/z_n)_n$ *son, también, secuencias de Cauchy.*

Demostración. La prueba es de igual manera que en el Análisis Real. $\square$

Proposición 1.2.3. *Sea* $\mathbb{K}$ *un campo. Sea* $|\cdot| : \mathbb{K} \to [0, +\infty)$ *una función tal que cumple: Para cada* $x, y \in \mathbb{K}$

i) $|x| = 0 \iff x = 0$,

ii) $|xy| = |x||y|$.

Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $|\cdot|$ *es un valor absoluto ultramétrico;*

b) $B[0, 1]$ *es un subanillo de* $\mathbb{K}$;

c) $1 + x \in B[0, 1]$ *si* $x \in B[0, 1]$.

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) $0 \in B[0, 1]$ ya que $|0| = 0 \leq 1$. Sean $x, y \in B[0, 1]$, entonces

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \leq \max\{1, 1\} = 1,$$

$$|xy| = |x||y| \leq 1 \cdot 1 = 1.$$

Esto prueba que $B[0, 1]$ es un anillo.

b)$\Rightarrow$c) Si $x \in B[0, 1]$, como $1 \in B[0, 1]$ y $B[0, 1]$ es un anillo, entonces $1 + x \in B[0, 1]$.

c)$\Rightarrow$a) Si $x = y = 0$ entonces la desigualdad triangular fuerte es inmediata. Supongamos que $y \neq 0$, el caso $x \neq 0$. será similar. Vamos a separar en dos casos:

Si $|x| \leq |y|$: multiplicando por $|y^{-1}|$ obtenemos $|xy^{-1}| \leq 1$. Por hipótesis, $|1 + xy^{-1}| \leq 1$. Multiplicando por $|y|$, se tiene $|y + x| \leq |y| = \max\{|x|, |y|\}$.

Si $|x| > |y|$: multiplicamos por $|x^{-1}|$ y procedemos como el caso anterior. $\square$

Proposición 1.2.4. *Sea* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *un campo valuado. Se cumple que son equivalentes:*

a) $|\cdot|$ *es valor absoluto ultramétrico;*

b) $|2| \leq 1$*;*

c) $|n| \leq 1$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, *esto dice que la imagen de* $\mathbb{Z}$ *en* $\mathbb{K}$ *esta contenida en* $B[0, 1]$*;*

d) existe $C > 0$ *tal que* $|n| \leq C$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, *esto dice que la imagen de* $\mathbb{Z}$ *en* $\mathbb{K}$ *es acotada.*

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) $|2| = |1 + 1| \leq \max\{|1|, |1|\} = 1$.

b)$\Rightarrow$c) Por inducción sobre n. Para $n = 0, 1, 2$ es válido. Supongamos válido para $n \geq 2$, entonces

$$|n + 1| \leq \max\{|n|, |1|\} \leq 1.$$

Esto prueba lo pedido para $n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Para el caso $n \in \mathbb{Z}^-$, basta notar que $|n| = |-n|$.

c)$\Rightarrow$d) Hacemos $C = 1$.

d)$\Rightarrow$a) Sea $x \in B[0, 1]$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$|1 + x|^n = |(1 + x)^n| = \left|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|\binom{n}{k}\right| |x|^k \leq \sum_{k=0}^{n} C = C(n + 1).$$

De donde $|1 + x| \leq \sqrt[n]{C(n + 1)}$. Haciendo $n \to +\infty$ obtenemos $|1 + x| \leq 1$, esto es, $1 + x \in B[0, 1]$. Por la proposición 1.2.3, $|\cdot|$ es ultramétrico. $\square$

Corolario 1.2.1. *Todo campo valuado de característica positiva es ultramétrico.*

Demostración. Cuando la característica es positiva, la imagen de $\mathbb{Z}$ en el campo es un conjunto finito, y por tanto acotada. Luego, aplicamos la proposición 1.2.4 $\square$

Corolario 1.2.2. *El valor absoluto usual en $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ no es ultramétrico.*

Demostración. Si $|\cdot|$ es el valor absoluto usual, entonces $|2| = 2 > 1$. Luego, aplicamos la proposición 1.2.4. $\square$

Definición 1.2.2. Dados $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ valores absolutos en un campo $\mathbb{K}$. Diremos que $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son equivalentes si existe $\alpha > 0$ tal que $|x|_1 = |x|_2^\alpha$ $\forall x \in \mathbb{K}$.

Observación 1.2.2. Sean $\mathbb{K}$ un campo y $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ valores absolutos equivalentes en $\mathbb{K}$ con $\alpha > 0$ tal que $|x|_1 = |x|_2^\alpha$ $\forall x \in \mathbb{K}$. Entonces:

a) $|\cdot|_2$ y $|\cdot|_1$ son equivalentes, ya que

$$|x|_1 = |x|_2^\alpha \quad \forall x \in \mathbb{K} \iff |x|_1^{1/\alpha} = |x|_2 \quad \forall x \in \mathbb{K}.$$

b) Si $|\cdot|_1$ es arbitrario y $|\cdot|_2$ es trivial. Luego,

$$|x|_1 = \begin{cases} |x|_2^\alpha = 0^\alpha = 0 & , \ x = 0 \\ |x|_2^\alpha = 1^\alpha = 1 & , \ x \neq 0. \end{cases}$$

Se sigue que $|\cdot|_2$ es trivial. Por tanto, el valor absoluto trivial y un valor absoluto no trivial no pueden ser equivalentes.

Proposición 1.2.5. *Sean $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ valores absolutos no triviales en un campo $\mathbb{K}$. Las siguiente condiciones son equivalentes:*

a) $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son equivalentes,

b) $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ definen la misma topología,

c) dado $x \in \mathbb{K}$ se cumple que $|x|_1 < 1$ si y solo si $|x|_2 < 1$,

d) dado $x \in \mathbb{K}$ se cumple que $|x|_1 < 1$ entonces $|x|_2 < 1$.

Demostración. Denotemos $B^i(x, r)$ las bolas abiertas en $(\mathbb{K}, |\cdot|_i)$.

a)$\Rightarrow$b) Sea $\alpha > 0$ tal que $|x|_1 = |x|_2^\alpha$ $\forall x \in \mathbb{K}$. Las bolas abiertas en $(\mathbb{K}, |\cdot|_1)$ y $(\mathbb{K}, |\cdot|_2)$ coinciden, aunque los radio difieren. Más específicamente cumplen la igualdad

$$B^1(x, r^\alpha) = B^2(x, r) \quad x \in \mathbb{K}, r > 0.$$

Como el conjunto de bolas abiertas es una base para la topología, se sigue que las topologías son iguales.

b)$\Rightarrow$c) Sea $x \in B^1(0,1)$ no nulo. Entonces $\lim_n |x^n|_1 = \lim_n |x|_1^n = 0$. Esto implica que $\lim_n x^n = 0$ en la topología inducida por $|\cdot|_1$. Por la hipotesis, como la topología inducida por $|\cdot|_1$ y $|\cdot|_2$ son iguales, $\lim_n x^n = 0$ en la topología inducida por $|\cdot|_2$. Luego, $\lim_n |x^n|_2 = \lim_n |x|_2^n = 0$. Se sigue que necesariamente $|x|_2 < 1$. Esto muestra que $B^1(0,1) \subseteq B^2(0,1)$. Igualmente se prueba $B^2(0,1) \subseteq B^1(0,1)$.

c)$\Rightarrow$d) Es inmediato.

d)$\Rightarrow$a) Fijemos arbitrariamente $b \in \mathbb{K}^*$ tal que $|b|_1 < 1$. Por hipótesis, $|b|_2 < 1$. Definamos $c = \ln |b|_1 / \ln |b|_2 > 0$. Se sigue que $|b|_1 = |b|_2^c$. Sea $a \in \mathbb{K}^*$ arbitrario, escojamos $r \in \mathbb{R}$ tal que $|a|_1 = |b|_1^r$. Tomemos $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n \in \mathbb{K}^*$ tales que

$$\frac{\alpha_n}{\beta_n} < r < \frac{\gamma_n}{\delta_n} \text{ y } \lim_n \frac{\alpha_n}{\beta_n} = \lim_n \frac{\gamma_n}{\delta_n} = r.$$

Como $|b|_1 < 1$ y $|b|_2 < 1$ entonces,

$$|a|_1 = |b|_1^r < |b|_1^{\alpha_n/\beta_n}, |a|_1 = |b|_1^r > |b|_1^{\gamma_n/\delta_n}.$$

Luego,

$$|a^{\beta_n} b^{-\alpha_n}|_1 < 1, |b^{\gamma_n} a^{-\gamma_n}|_1 < 1.$$

Por la hipótesis,

$$|a^{\beta_n} b^{-\alpha_n}|_2 < 1, |b^{\gamma_n} a^{-\gamma_n}|_2 < 1.$$

Entonces

$$|a|_2 < |b|_2^{\alpha_n/\beta_n}, |a|_2 > |b|_2^{\gamma_n/\delta_n}.$$

Haciendo $n \to +\infty$ se tiene

$$|a|_2 < |b|_2^r, |a|_2 > |b|_2^r.$$

Obteniendo así la igualdad $|a|_2 = |b|_2^r$. Finalmente,

$$|a|_1 = |b|_1^r = (|b|_2^c)^r = (|b|_2^r)^c = |a|_2^c$$

para todo $a \in \mathbb{K}^*$ arbitrario. Para $a = 0$ se sigue rápidamente. $\square$

Corolario 1.2.3. *Sean* $|\cdot|_1$ *y* $|\cdot|_2$ *valores absolutos equivalentes en un campo* $\mathbb{K}$. *Entonces* $|\cdot|_1$ *es ultramétrico si y solo* $|\cdot|_2$ *es ultramétrico.*

Demostración. Basta con probar la condición necesaria. Tenemos dos casos:

Si $|\cdot|_1$ es trivial. Por la observación 1.2.2, $|\cdot|_2$ es trivial.

Si $|\cdot|_1$ es no trivial. Por la observación 1.2.2, $|\cdot|_2$ es no trivial. Por la proposición 1.2.4, $|1/2|_1 \geq 1$. Por la proposición 1.2.5, las bolas unitarias abiertas en $(\mathbb{K}, |\cdot|_1)$ y $(\mathbb{K}, |\cdot|_2)$ coinciden, entonces $|1/2|_2 \geq 1$. Nuevamente, por 1.2.4, $|\cdot|_2$ es también ultramétrico . □

Definición 1.2.3. Sea $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ un campo ultramétrico. Según la proposición 1.2.3, la bola unitaria cerrada es un subanillo de $\mathbb{K}$, que denotaremos $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. De la misma forma se puede probar que para todo $R \leq 1$, las bolas $B(0, R), B[0, R]$ son ideales de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. La bola unitaria abierta es denotado por $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$.

Proposición 1.2.6. *Sea* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *un campo ultramétrico. Se cumple que el par* $(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}, \mathfrak{m}_{\mathbb{K}})$ *es un dominio de valuación de* $\mathbb{K}$.

Demostración. Si $x \notin \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, es decir, $|x| \geq 1$; entonces, $|x^{-1}| \leq 1$, esto es, $x^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Esto significa que dado $x \in \mathbb{K}^*$, entonces $x \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ o $x^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Esto prueba que $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ es un dominio de valuación de $\mathbb{K}$.

Notemos que los no invertibles son en $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ esta exactamente en $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$, ya que dado $x \in \mathbb{K}^*$

$$|x| < 1 \iff |x^{-1}| > 1, \ |x| = 1 \iff |x^{-1}| = 1.$$

Esto prueba que $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$ es (el único) ideal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. □

Lema 1.2.1. *Sean* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *un campo valuado y* $T : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *definida como* $T(x) = ax + b$ *con* $a, b \in \mathbb{K}$ *fijados. Entonces*

a) T *es uniformente continua,*

b) T *es invertible* $\iff a \neq 0$,

c) En el caso del item b, T *es homeomorfismo uniforme.*

Demostración.

a) Sean $x, y \in \mathbb{K}$ tal que

$$|T(x) - T(y)| = |ax + b - (ay + b)| = |a(x - y)| = |a||x - y|,$$

esto prueba que T es Lipschitziana y por tanto uniformemente continua.

b) Si $a = 0$, entonces $T = 0$. Si $a \neq 0$, entonces $T^{-1}(x) = a^{-1}x - a^{-1}b$.

c) Si $a \neq 0$, T y T^{-1} son uniformemente continuos por a). $\square$

Proposición 1.2.7. *Sea* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *un campo valuado. Son equivalentes:*

a) $|\cdot|$ *no es el valor absoluto trivial,*

b) existe un punto de acumulación,

c) todo punto de $\mathbb{K}$ *es punto de acumulación,*

d) $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *no es discreto.*

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) Existe $x \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$ no nulo. Entonces, $|x^n| = |x|^n \to 0$ cuando $n \to +\infty$. De donde 0 es punto de acumulación.

b)$\Rightarrow$c) Existe $x \in \mathbb{K}$ un punto de acumulación. Sean $y \in \mathbb{K}$ arbitrario y $T : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ la traslación que lleva x en y. Como T es homeomorfismo, y es punto de acumulación $\forall y \in \mathbb{K}$.

c)$\Rightarrow$b) Es inmediato.

b)$\Rightarrow$a) Como 0 es punto de acumulación de $\mathbb{K}$, para $\epsilon = 1$ existe $y \in B(0, 1) \cap \mathbb{K}^*$. Es decir, existe $y \in \mathbb{K}^*$ tal que $|y| < 1$. Esto prueba que $|\cdot|$ no es el valor absoluto trivial.

Finalmente, b) y d) son equivalentes por definición. $\square$

Proposición 1.2.8. *Supongamos* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *es no discreto. Entonces son equivalentes:*

a) $\mathbb{K}$ *es localmente compacto,*

b) existe una bola de radio positivo compacta, *c) todo cerrado y acotado es compacto.*

Demostración.

a)$\Rightarrow$b) Existen U compacto y $r > 0$ tal que $B(0,r) \subseteq U$. Por la proposición 1.1.2, $B(0,r)$ es cerrado del compacto U, por tanto $B(0,r)$ es compacto.

b)$\Rightarrow$c) Existe $r > 0$ y $x \in \mathbb{K}$ tal que $B(x,r)$ es compacto. Usando el homeomorfismo traslación que lleva x a 0, podemos considerar $x = 0$. Sea F un cerrado y acotado de $\mathbb{K}$. Escogiendo $R > \sup\{|y| : y \in F\}$ se ve que $F \subseteq B(0,R)$ (aquí se usa que F es acotado). Supongamos que existe $T : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ homeomorfismo tal que $T(F) \subseteq B(0,r)$, en este caso $T(F)$ es cerrado del compacto $B(0,r)$, luego F es compacto (aquí hemos usado que F es cerrado).

Probemos la existencia de T. Como $\mathbb{K}$ es no discreto, por la proposición 1.2.7, x es punto de acumulación. Se sigue que existe $z \in B(0,r/R)$. Definimos $T : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ como $T(w) = zw$. Vemos que

$$w \in B(0,R) \Rightarrow |T(w)| = |zw| = |z||w| < \left(\frac{r}{R}\right) R = r,$$

luego $T(B(0,R)) \subseteq B(0,r)$. Se sigue

$$T(F) \subseteq T(B(0,R)) \subseteq B(0,r).$$

c)$\Rightarrow$a) Para cada punto podemos escoger una bola cerrada de radio positivo, el cual es compacto por hipótesis. □

Corolario 1.2.4. *Supongamos que* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *es no discreto. Entonces,* $\mathbb{K}$ *es localmente compacto si y solo si* $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ *es compacto.*

Demostración. Si $\mathbb{K}$ es localmente compacto entonces todo cerrado y acota en compacto, en especial $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, la bola unitaria cerrada de $\mathbb{K}$. Recíprocamente, si $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ es compacto, entonces $\mathbb{K}$ tiene una bola de radio positivo compacta, de donde $\mathbb{K}$ tiene que se localmente compacto. □

Observación 1.2.3. El corolario 1.2.4 es cierto si reemplazamos $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, por cualquier cerrado y acotado, por ejemplo $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$.

1.3 Compleción de un campo valuado

En esta sección, dado un campo valuado $(\mathbb{K}, |\cdot|)$, no centraremos en encontrar un campo valuado $(\widehat{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$, llamado la compleción, con la propiedad: $\|\cdot\|$ extiende a $|\cdot|$ y $\widehat{\mathbb{K}}$ es el menor campo de extensión de $\mathbb{K}$, que es completo.

A lo largo de esta sección asumiremos que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es un campo valuado no necesariamente ultramétrico ni completo.

Definición 1.3.1. Diremos que un campo valuado $(\widehat{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$ es compleción de $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ si:

i) $\widehat{\mathbb{K}}$ es extensión de $\mathbb{K}$ y $\|\cdot\|$ extiende a $|\cdot|$;

ii) $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es denso en $(\widehat{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$;

iii) $(\widehat{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$ es completo.

Pasaremos a construir el campo valuado condidato a ser la compleción de $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Construcción 1.3.1. Definamos

$$C(\mathbb{K}) = \{\text{Secuencias de Cauchy en } \mathbb{K}\},$$

junto con las operaciones

$$\begin{array}{rrcl} + : & C(\mathbb{K}) \times C(\mathbb{K}) & \longrightarrow & C(\mathbb{K}) \\ & ((x_n)_n, (y_n)_n) & \longmapsto & (x_n + y_n)_n, \\ \cdot : & C(\mathbb{K}) \times C(\mathbb{K}) & \longrightarrow & C(\mathbb{K}) \\ & ((x_n)_n, (y_n)_n) & \longmapsto & (x_n y_n)_n. \end{array}$$

Estas operaciones están bien definidas y dotan a $C(\mathbb{K})$ de una estructura de anillo conmutativo con $0 = (0)_n$, $1 = (1)_n$, $-(x_n)_n = (-x_n)_n$ y $(y_n)_n^{-1} = (y_n^{-1})_n$ tal que $y_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

El conjunto

$$\mathfrak{m} = \{\text{Secuencias de Cauchy que convergen a } 0\}$$

es ideal de $C(\mathbb{K})$. Este ideal es propio, la secuencia constante $(1)_n$ converge a $1 \neq 0$.

Todo lo anteriormente afirmado es probado de manera similar que en el Análisis Real. Lo que no es tan inmediato es que $\mathfrak{m}$ es ideal maximal de $C(\mathbb{K})$.

Lema 1.3.1. *El ideal* $\mathfrak{m}$ *es ideal maximal de* $C(\mathbb{K})$*, o equivalente,* $C(\mathbb{K})/\,\mathfrak{m}$ *es un campo.*

Demostración. Sea $(x_n)_n \in C(\mathbb{K}) \setminus \mathfrak{m}$ arbitrario. Luego la secuencia $(x_n)_n$ no converge a cero. Así podemos tomar una subsecuencia (también de Cauchy) $(x_{n_k})_k$ de términos no nulos. Esta subsecuencia cumple la propiedad $\lim_k(x_k - x_{n_k}) = 0$, esto es, $(x_k)_k - (x_{n_k})_k \in \mathfrak{m}$. Entonces, $(x_{n_k})_k^{-1}\left((x_k)_k - (1)_k\right) \in \mathfrak{m}$. Se sigue que $(1)_k = (x_{n_k})_k^{-1}(x_k)_k + (y_k)_k$ para algún $(y_k)_k \in \mathfrak{m}$. Esto implica que, $C(\mathbb{K}) = C(\mathbb{K})(x_n)_n + \mathfrak{m}$ para cualquier $(x_n)_n \in C(\mathbb{K}) \setminus \mathfrak{m}$. Por tanto, $\mathfrak{m}$ es ideal maximal de $C(\mathbb{K})$. $\square$

Denotaremos $\widehat{\mathbb{K}} = C(\mathbb{K})/\,\mathfrak{m}$. Escribiremos, también, $[(x_n)_n]$ en vez de $(x_n)_n + \mathfrak{m}$.

Notemos que si $(x_n)_n$ es una secuencia de Cauchy en $\mathbb{K}$, entonces $(|x_n|)_n$ es una secuencia de Cauchy en $[0, +\infty)$. Por la completitud de $\mathbb{R}$, existe $\lim_n |x_n|$ en $[0, +\infty)$. En virtud de esto, definiremos la función:

$$\begin{array}{rccl} \|\cdot\| & : & \widehat{\mathbb{K}} & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & & [(x_n)_n] & \longmapsto & \lim_n |x_n| \end{array}$$

Lema 1.3.2. *La función* $\|\cdot\| : \widehat{\mathbb{K}} \to [0, +\infty)$ *está bien definida y es un valor absoluto. Además, si* $|\cdot|$ *es ultramétrico entonces* $\|\cdot\|$ *es ultramétrico.*

Demostración. Sean $x = [(x_n)_n], y = [(y_n)_n], z = [(z_n)_n] \in \widehat{\mathbb{K}}$.

a) Es bien definida:

Sea $x = y$, esto es, $(x_n)_n - (y_n)_n \in \mathfrak{m}$. Se sigue que $\lim_n(x_n - y_n) = 0$. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n - y_n| < \epsilon$ para todo $n > N$. Luego

$$||x_n| - |y_n|| \leq |x_n - y_n| < \epsilon \quad \forall n > N.$$

Esto implica que $\lim_n |x_n| = \lim_n |y_n|$. Esto significa que $\|\cdot\|$ no depende de la secuencia representante.

b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$:

$$\|x\| = \lim_n |x_n| = 0 \iff \lim_n x_n = 0 \iff (x_n)_n \in \mathfrak{m} \iff x = [(x_n)_n] = 0.$$

c) $\|xy\| = \|x\|\|y\|$:

$$\|xy\| = \|[(x_n y_n)_n]\| = \lim_n |x_n y_n| = \left(\lim_n |x_n|\right)\left(\lim_n |y_n|\right) = \|x\|\|y\|.$$

d) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$:

$$\|x+y\| = \|[(x_n+y_n)_n]\| = \lim_n |x_n+y_n| \leq \lim_n |x_n| + \lim_n |y_n| = \|x\| + \|y\|.$$

Hasta aquí, hemos probado que $\|\cdot\|$ es un valor absoluto en $\widehat{\mathbb{K}}$.

e) Si $|\cdot|$ es ultramétrico, entonces $\|\cdot\|$ es ultramétrico:

$$\|x+y\| = \lim_n |x_n+y_n| \leq \lim_n \max\{|x_n|, |y_n|\} \leq \max\left\{\lim_n |x_n|, \lim_n |y_n|\right\} = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Termina así la prueba. $\square$

Ahora, definiremos la función

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{K}} \\ & & x & \longmapsto & [(x)_n] \end{array}$$

Proposición 1.3.1. *T es un homomorfismo de campos que preserva el valor absoluto.*

Demostración. Sean $x, y \in \mathbb{K}$.

$$T(x+y) = [(x+y)_n] = [(x)_n + (y)_n] = [(x)_n] + [(y)_n] = T(x) + T(y),$$

$$T(xy) = [(xy)_n] = [(x)_n(y)_n] = [(x)_n][(y)_n] = T(x)T(y),$$

$$\|T(x)\| = \|[(x)_n]\| = \lim_n |x| = |x|.$$

Esto prueba lo pedido. $\square$

Mediante T podemos identificar $\mathbb{K}$ como subcampo de $\widehat{\mathbb{K}}$ y $\|\cdot\|$ como extensión de $|\cdot|$. De esta manera hemos construido un nuevo campo valuado $(\widehat{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$ extendiendo al campo valuado $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

En lo que sigue, vamos a probar que $(\widehat{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$ es la compleción de $(\mathbb{K}, |\cdot|)$.

Proposición 1.3.2. $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *es denso en* $(\widehat{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$.

Demostración. Sean $x = [(x_n)_n] \in \widehat{\mathbb{K}}$ y $\epsilon > 0$. Como (x_n) es una secuencia de Cauchy, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|x_n - x_m| < \epsilon/2\ \forall n \geq N$. Haciendo $m = N$ tenemos $|x_n - x_N| < \epsilon/2\ \forall n \geq N$. Así tenemos,

$$\|x - x_N\| = \|[(x_n)_n] - x_N\| = \lim_n |x_n - x_N| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

con $x_N \in \mathbb{K}$. Terminó la prueba. $\square$

Proposición 1.3.3. *El campo valuado* $(\widehat{\mathbb{K}}, \|\cdot\|)$ *es completo.*

Demostración. Sea $(x_n)_n$ una secuencia de Cauchy en $\widehat{\mathbb{K}}$. Por la proposición 1.3.2, para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ existe $\xi_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$\|x_n - \xi_n\| < 1/n. \tag{1.1}$$

Haciendo $n \to +\infty$ tenemos $\lim_n (x_n - \xi_n) = 0$. Así, para probar que $(x_n)_n$ converge, basta con probar que $(\xi_n)_n$ converge.

Afirmamos que $(\xi_n)_n$ es una secuencia de Cauchy. En efecto, dado $\epsilon > 0$, como $(x_n)_n$ es secuencia de Cauchy y de (1.1), existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$\|x_n - \xi_n\| < \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}, \quad \|x_n - x_m\| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n, m \geq N.$$

Usando esto tenemos,

$$\begin{aligned} |\xi_n - \xi_m| &= \|\xi_n - \xi_m\| \\ &= \|\xi_n - x_n + x_n - x_m + x_m - \xi_m\| \\ &\leq \|x_n - \xi_n\| + \|x_n - x_m\| + \|x_m - \xi_m\| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall n, m \geq N \\ &= \epsilon, \quad \forall n, m \geq N \end{aligned}$$

Esto prueba que $(\xi_n)_n$ es una secuencia de Cauchy en $\mathbb{K}$.

Consideremos el elemento $\xi = [(\xi_n)_n] \in \widehat{\mathbb{K}}$. Afirmamos que $\lim_n \xi_n = \xi$. En efecto, dado $\epsilon > 0$, como $(\xi_n)_n$ es secuencia de Cauchy, existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|\xi_n - \xi_m| < \epsilon/2$ $\forall n, m \geq M$. Luego,

$$\|\xi_n - \xi\| = \lim_m |\xi_n - \xi_m| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

Esto finaliza la prueba. $\square$

1.4 Espacios normados sobre campos valuados

En esta sección estudiaremos espacios normados de dimensión finita sobre campos valuados, cuya definición es análogo al caso real o complejo; con miras a estudiar valores absolutos en extensiones algebraicas de un campo ultramétrico no discreto completo.

A lo largo de esta sección asumiremos que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es un campo completo y V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita $n \geq 1$.

Definición 1.4.1. Una función $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, +\infty)$ es llamada norma en V si

i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

ii) $\|ax\| = |a|\|x\| \; \forall a \in \mathbb{K} \; \forall x \in V$;

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall x, y \in V$.

Diremos que $(V, \|\cdot\|)$ es un $(\mathbb{K}, |\cdot|)$-espacio normado.

Proposición 1.4.1. *La función*

$$\begin{array}{rcl} d \; : \; V \times V & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ (v, w) & \longmapsto & \|v - w\| \end{array}$$

es una métrica en V.

Demostración. Igual como en la demostración de la proposición 1.2.1. □

Ejemplo 1.4.1. Fijemos $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. La función $\|\cdot\|_\beta : V \longrightarrow [0, +\infty)$ definida como

$$\|a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n)\|_\beta = \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\},$$

es una norma en V. En el caso que $V = \mathbb{K}^n$ y β es la base canónica, denotaremos $\|\cdot\|_\beta$ como $\|\cdot\|_\infty$. En el caso $n = 1$, $V = \mathbb{K}$ y $\|\cdot\|_\infty = |\cdot|$.

Proposición 1.4.2. *Sea W un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de cualquier dimensión con una norma $\|\cdot\|_W$ y consideremos la norma $\|\cdot\|_\beta$ en V con β una base de V. Entonces toda transformación lineal $T : V \longrightarrow W$ es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $x \in V$. Escribamos $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $x = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Luego

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_W &= \|a_1T(v_1) + \ldots + a_nT(v_n)\|_W \\
&\leq \max\{\|a_1T(v_1)\|_W, \ldots, \|a_nT(v_n)\|_W\} \\
&\leq \max\{|a_1|\|T(v_1)\|_W, \ldots, |a_n|\|T(v_n)\|_W\} \\
&\leq \max\{\|T(v_1)\|_W, \ldots, \|T(v_n)\|_W\} \max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\} \\
&= \max\{\|T(v_1)\|_W, \ldots, \|T(v_n)\|_W\}\|x\|_\beta.
\end{aligned}$$

Haciendo $C = \max\{\|T(v_1)\|_W, \ldots, \|T(v_n)\|_W\}$, vemos que C no depende de x, tenemos que $\|T(x)\|_W \leq C\|x\|_\beta \ \forall x \in V$. Ahora, dados $x, y \in V$, en la desigualdad anterior tenemos

$$\|T(x) - T(y)\|_W = \|T(x-y)\|_W \leq C\|x-y\|_\beta \quad \forall x, y \in V.$$

Lo que prueba que T es uniformemente continua. □

Corolario 1.4.1. *Todo subespacio de V es cerrado para una norma $\|\cdot\|_\beta$ en V con β base de V*

Demostración. Sean W subespacio propio de V. Sea $T : V \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\ker T = W$. Por la proposición 1.4.2, T es continua, entonces $W = \ker T$ es cerrado. □

Definición 1.4.2. Las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en V se dicen equivalentes, si existen $C_1, C_2 > 0$ tal que $C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1$ $x \in V$.

Observación 1.4.1. Notemos en la definición 1.4.2, no importa el orden de $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en la definición, ya que

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \ \forall x \in V \iff \frac{1}{C_2}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \frac{1}{C_1}\|x\|_2 \ \forall x \in V.$$

Proposición 1.4.3. *Todas las normas en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita son equivalentes.*

Demostración. Fijemos $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Basta probar que todas las normas son equivalente a $\|\cdot\|_\beta$. En efecto, sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas en V equivalentes a

$\|\cdot\|_\infty$. Existen $A_1, A_2, B_1, B_2 > 0$ tal que

$$A_1\|x\|_1 \leq \|x\|_\beta \leq A_2\|x\|_1, \; B_1\|x\|_\beta \leq \|x\|_2 \leq B_2\|x\|_\beta \quad \forall x \in V.$$

Luego,

$$A_1B_1\|x\|_1 \leq B_1\|x\|_\beta \leq \|x\|_2 \leq B_2\|x\|_\beta \leq A_2B_2\|x\|_1 \quad \forall x \in V.$$

Se sigue que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son, en efecto, equivalentes.

Ahora, dada $\|\cdot\|$ una norma arbitraria en V, probaremos es equivalente a $\|\cdot\|_\beta$.

Sea $x \in V$, podemos escribir $x = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$ con $x_i \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \|a_1v_1 + \ldots + a_nv_n)\| \\
&\leq |a_1|\|v_1\| + \ldots + |a_n|\|v_n\| \\
&\leq n\max\{|a_1|\|v_1\|, \ldots, |a_n|\|v_n\|\} \\
&= n\max\{|a_1|, \ldots, |a_n|\}\max\{\|v_1\|, \ldots, \|v_n\|\},
\end{aligned}$$

Haciendo $C_2 = \max\{\|v_1\|, \ldots, \|v_n\|\} > 0$ tenemos que $\|x\| \leq C_2\|x\|_\beta$ $\forall x \in V$. Solo falta probar que existe $C_1 > 0$ tal que $C_1\|x\|_\beta \leq \|x\|$ $\forall x \in V$. Probemos esto por inducción sobre $n \geq 1$.

Si $n = 1$: Dado $x \in V$, escribamos $x = av_1$ para algún $a \in \mathbb{K}$. Luego,

$$\|x\| = \|av_1\| = \|v_1\||a| = \|v_1\|\|x\|_\beta.$$

Elegimos $C_1 = \|v_1\|$.

Si $n > 1$: Sean $W = \mathbb{K}v_1 + \ldots + \mathbb{K}v_{n-1}$, $\gamma = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ base de W y $\|\cdot\|_\gamma$ norma en W, que coincide con $\|\cdot\|_\beta$ restricto a W. Por el corolario 1.4.1, W es cerrado de V, entonces W es completo, por ser subespacio de un espacio completo. por hipótesis de inducción,

$$\|z\| \geq C\|z\|_\gamma \quad \forall z \in W. \tag{1.2}$$

Además, como $v_n \notin W$ y W es cerrado, sea $d(v_n, W) > 0$ la distancia entre v_n y W en $(V, \|\cdot\|)$. Sea $x \in V$, podemos escribir $x = y + av_n$ con $y \in W, a \in \mathbb{K}$.

Si $a = 0$,

$$\|x\| = \|y\| \geq C\|y\|_\gamma = C\max\{\|y\|_\gamma, 0\} = C\max\{\|y\|_\gamma, |a|\} = C\|x\|_\beta.$$

Si $a \neq 0$, definimos $D = \|v_n\|^{-1} d(v_n, W) > 0$, luego

$$\|x\| = \|y + av_n\| = |a|\|a^{-1}y + v_n\| \geq |a|d(v_n, W) = |a|\|v_n\|\|v_n\|^{-1}d(v_n, W) = D\|av_n\|.$$

De donde $\|x\| \geq D\|av_n\|$. Aplicando esto último,

$$\|y\| = \|x - av_n\| \leq \|x\| + \|av_n\| \leq \|x\| + D^{-1}\|x\| = \left(1 + D^{-1}\right)\|x\|.$$

De donde, $\|x\| \geq \left(1 + D^{-1}\right)^{-1}\|y\|$. Desde que $y \in W$, por (1.2), tenemos $\|y\| \geq C\|y\|_\gamma$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\|x\| &\geq \max\left\{D, \left(1 + D^{-1}\right)^{-1}\|y\|\right\} \\
&\geq \max\left\{|a|d(v_n, W), \left(1 + D^{-1}\right)^{-1} C\|y\|_\gamma\right\} \\
&\geq \min\left\{d(v_n, W)\left(1 + D^{-1}\right)^{-1} C\right\} \max\{|a|, \|y\|_\gamma\}. \\
&\geq \min\left\{d(v_n, W)\left(1 + D^{-1}\right)^{-1} C\right\} \|x\|_\beta.
\end{aligned}$$

Finalmente, de lo obtenido en en caso $a = 0$ y $a \neq 0$, haciendo

$$C_1 = \min\left\{d(v_n, W)\left(1 + D^{-1}\right)^{-1} C, C\right\} > 0$$

tenemos que $\|x\| \geq C_1\|x\|_\beta$, como se quería probar. $\square$

1.5 Extensiones algebraicas de campos ultramétricos

En esta sección buscaremos extender valores absoluto de un campo ultramétrico a sus extensiones extensiones algebraicas, además de probar algunas consecuencias de este hecho. A lo largo de esta sección asumiremos que $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ es un campo completo.

Definición 1.5.1. Dado $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n+1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ definamos

$$\|f\| = \max_{i=0,\ldots,n} |a_i|.$$

Si $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ definimos

$$\overline{f}(X) = (a_n + \mathfrak{m}_{\mathbb{K}})X^n + (a_{n-1} + \mathfrak{m}_{\mathbb{K}})X^{n+1} + \ldots + (a_0 + \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}) \in \left(\frac{\mathcal{O}_{\mathbb{K}}}{\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}}\right)[X].$$

Proposición 1.5.1. *$\|\cdot\|$ en $\mathbb{K}[X]$ tiene las propiedades: Para todo $f, g \in \mathbb{K}[X], a \in \mathbb{K}$*

a) $\|f\| = 0 \iff f = 0.$

b) $\|a\| = |a|.$

c) $\|af\| = |a|\|f\|.$

d) $\|fg\| \leq \|f\|\|g\|.$

e) $\|f + g\| \leq \max\{\|f\|, \|g\|\}.$

f) Si $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ entonces $\overline{f} = 0 \iff f \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}[X] \iff \|f\| < 1.$

Demostración. Denotemos $f(X) = a_nX^n + \ldots + a_0, g(X) = b_mX^m + \ldots + b_0$. Hacemos el resto de a_i's y b_i's iguales a cero. Entonces

a) $\|f\| = \max_{i=0,\ldots,n} |a_i| = 0 \iff |a_n| = \ldots = |a_0| = 0 \iff a_n = \ldots = a_0 = 0 \iff f = 0.$

b) $\|fg\| = \left\|\sum_{i=0}^{n+m}\sum_{j=0}^{i} a_jb_{i-j}X^i\right\| = \max_{0\leq j\leq i\leq n+m} |a_ib_{i-j}| \leq \max_{i=0,\ldots,n} |a_i| \cdot \max_{i=0,\ldots,m} |b_i| = \|f\|\|g\|.$

c) Es inmediato.

d) $\|af\| = \left\|\sum_{i=0}^{n} aa_iX^i\right\| = \max_{i=0,\ldots,n} |aa_i| = \max_{i=0,\ldots,n} |a||a_i| = |a| \max_{i=0,\ldots,n} |a_i| = |a|\|f\|.$

e) $\|f+g\| = \left\| \sum_{i=0}^{n+m} (a_i+b_i)X^i \right\| = \max_{i=0,\ldots,n+m} |a_i+b_i| \leq \max_{i=0,\ldots,n} |a_i| + \max_{i=0,\ldots,m} |b_i| = \|f\|+\|g\|.$

f) $\overline{f} = 0 \iff a_n + \mathfrak{m}_{\mathbb{K}} = \ldots = a_0 + \mathfrak{m}_{\mathbb{K}} = \mathfrak{m}_{\mathbb{K}} \iff a_n, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}} \iff f \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}[X],$

$\|f\| < 1 \iff |a_n| < 1, \ldots, |a_0| < 1 \iff a_n, \ldots, a_0 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}} \iff f \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}[X].$ $\square$

La proposición 1.5.1 implica que la función $\|\cdot\| : \mathbb{K}[X] \longrightarrow [0,+\infty)$ es una norma ultramétrica en $\mathbb{K}[X]$ con bola abierta unitaria igual a $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}[X]$ y al núcleo de la proyección $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X] \to (\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\,\mathfrak{m}_{\mathbb{K}})[X]$.

Proposición 1.5.2. *Sean $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ secuencias en $\mathbb{K}[X]$ y $f, g \in \mathbb{K}[X]$. Escribamos, $f_n(X) = \sum_{i\geq 0} a_{n,i}X^i$, $g_n(X) = \sum_{i\geq 0} b_{n,i}X^i$, $f(X) = \sum_{i\geq 0} a_iX^i$ y $g(X) = \sum_{i\geq 0} b_iX^i$ (todas estas sumas son finitas). Entonces:*

a) Si $(f_n)_n$ es secuencia de Cauchy en $\mathbb{K}[X]$, entonces $(a_{n,i})_n$ es secuencia de Cauchy en $\mathbb{K}$ para todo $i \geq 0$.

b) Si $\lim_n f_n = f$ en $\mathbb{K}[X]$, entonces $\lim_n a_{n,i} = a_i$ en $\mathbb{K}$ $\forall i \geq 0$.

c) Recíprocamente, si $\lim_n a_{n,i} = c_i$ en $\mathbb{K}$ $\forall i \geq 0$, si $h(X) = \sum_{i\geq 0} c_iX^i \in \mathbb{K}[X]$, entonces $\lim_n f_n = h$.

d) Si $\lim_n f_n = f$ y $\lim_n g_n = g$, entonces $\lim_n(f_n + g_n) = f + g$ y $\lim_n f_ng_n = fg$.

Demostración. Notemos que $\|f_n - f_m\| \geq |a_{n,i} - a_{m,i}|$ y $\|f_n - f\| \geq |a_{n,i} - a_i|$ para todo $i \in \mathbb{Z}^+$. Sea $\epsilon > 0$ arbitrario.

a) Como $(f_n)_n$ es de Cauchy, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|a_{n,i} - a_{m,i}| \leq \|f_n - f_m\| < \epsilon$ $\forall n, m \geq N$. Esto implica que $(a_{n,i})_n$ es también de Cauchy $\forall i \in \mathbb{Z}^+$.

b) Como $\lim_n f_n = f$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|a_{n,i} - a_i| \leq \|f_n - f\| < \epsilon$ $\forall n \geq N$. Esto implica que $\lim_n a_{n,i} = a_i$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$.

c) Como $\lim_n a_{n,i} = c_i$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|a_{n,i} - c_i| < \epsilon$ $\forall n \geq N$, $\forall i \in \mathbb{Z}^+$. Luego

$$\|f_n - h\| = \max_{i\in\mathbb{Z}^+}\{|a_{n,i} - c_i|\} < \epsilon \ \forall n \geq N,\ \forall i \in \mathbb{Z}^+.$$

Esto implica que $\lim_n f_n = h$.

d) Como $\lim_n f_n = f$ y $\lim_n g_n = g$, por el item b, $\lim_n a_{n,i} = a_i$ y $\lim_n b_{n,i} = b_i$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$. Entonces,

$$\lim_n (a_{n,i} + b_{n,i}) = a_i + b_i, \ \lim_n \sum_{j=0}^{i} a_{n,j} b_{n,i-j} = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}.$$

Esto significa que las secuencias coeficientes de $f_n + g_n, f_n g_n$ convergen a los respectivos coeficientes de $f + g, fg \in \mathbb{K}[X]$, y por el item c, tenemos que, $\lim_n f_n + g_n = f + g$ y $\lim_n f_n g_n = fg$. $\square$

Proposición 1.5.3 (**Lema de Hensel**). *Sean $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X], g, h \in (\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/\mathfrak{m}_{\mathbb{K}})[X]$ tal que $\|f\| = 1$, g, h primos relativos, g mónico y $\overline{f} = gh$. Entonces existen $G, H \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ tal que*

a) $f = GH$*,*

b) $\overline{G} = g$ *y* $\overline{H} = h$*,*

c) $\deg G = \deg g$ *y g es mónico.*

Demostración. Usaremos los resultados de las proposiciones 1.5.1 y 1.5.2. Elijamos polinomios $G_1, H_1 \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ tal que

$$\overline{G_1} = g, \ \deg G_1 = \deg g, \ G_1 \text{ es mónico}, \ \overline{H_1} = h, \ \deg H_1 = \deg h.$$

Como f, g son primos relativos en $(\mathcal{O}_{\mathbb{K}}, \mathfrak{m}_{\mathbb{K}})$, existen $R, S \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ tal que $g\overline{R} + h\overline{S} = 1$. Luego,

$$\overline{RG_1 + SH_1 - 1} = \overline{RG_1} + \overline{SH_1} - 1 = \overline{R}g + \overline{S}h - 1 = 0,$$

$$\overline{f - G_1 H_1} = \overline{f} - \overline{G_1 H_1} = \overline{f} - gh = 0.$$

Esto significa que $f - G_1 H_1, RG_1 + SH_1 - 1 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$. Así podemos tomar

$$\delta = \max\{\|f - G_1 H_1\|, \|RG_1 + SH_1 - 1\|\} < 1. \tag{1.3}$$

Si $\delta = 0$, entonces $\|f - G_1 H_1\| = 0$, de donde $f = G_1 H_1$, que cumple las condiciones pedidas.

En lo que resta de la prueba, asumiremos que $\delta \in (0, 1)$. Pasaremos a construir, por inducción, secuencias $(G_n)_n$, $(H_n)_n$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}^+$ tenemos

i) $\|f - G_n H_n\| \leq \delta^n$,

ii) $\|G_n - G_{n-1}\| \leq \delta^{n-1}$, $\|H_n - H_{n-1}\| \leq \delta^{n-1}$ $n \neq 1$,

iii) $\overline{G_n} = g$, $\overline{H_n} = h$,

iv) $\deg G_n = \deg g$, $\deg G_n + \deg H_n \leq \deg f$.

Vemos que G_1, H_1 ya están determinados. Asumiremos que para $m = 1, \ldots, n-1$ ya están construidos G_m, H_m satisfaciendo i, ii, iii, iv. Definiremos

$$G_n = G_{n-1} + \epsilon^{n-1} t_{n-1}, \quad H_n = H_{n-1} + \epsilon^{n-1} u_{n-1},$$

con $t_{n-1}, u_{n-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ a determinar y $\epsilon \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$ tal que $|\epsilon| = \delta < 1$ (por (1.3), esto es posible). Se sigue rápidamente que

$$\|G_n - G_{n-1}\| = \|\epsilon^{n-1} t_{n-1}\| = |\epsilon|^{n-1} \|t_{n-1}\| \leq \delta^{n-1},$$

$$\|H_n - H_{n-1}\| = \|\epsilon^{n-1} u_{n-1}\| = |\epsilon|^{n-1} \|u_{n-1}\| \leq \delta^{n-1},$$

$$\overline{G_n} = \overline{G_{n-1} + \epsilon^{n-1} t_{n-1}} = \overline{G_{n-1}} + \overline{\epsilon}^{n-1} \overline{t_{n-1}} = \overline{G_{n-1}} + 0^{n-1} \overline{t_{n-1}} = \overline{G_{n-1}} = g,$$

$$\overline{H_n} = \overline{H_{n-1} + \epsilon^{n-1} u_{n-1}} = \overline{H_{n-1}} + \overline{\epsilon}^{n-1} \overline{u_{n-1}} = \overline{H_{n-1}} + 0^{n-1} \overline{u_{n-1}} = \overline{H_{n-1}} = h.$$

Esto prueba ii y iii.

De la desigualdad triangular fuerte tenemos

$$\begin{aligned} \|G_1 - G_{n-1}\| &= \|G_1 - G_2 + G_2 - \ldots - G_{n-2} + G_{n-2} - G_{n_1}\| \\ &\leq \max\{\|G_1 - G_2\|, \ldots, \|G_{n-2} - G_{n-1}\|\} \\ &\leq \max\{\delta, \ldots, \delta^{n-2}\} \\ &= \delta \end{aligned}$$

De igual manera para H_1, H_{n-1}, esto es,

$$\|G_1 - G_{n-1}\| \leq \delta, \ \|H_1 - H_{n-1}\| \leq \delta. \tag{1.4}$$

Por la hipótesis inductiva item i,

$$\|\epsilon^{-(n-1)}(f - G_{n-1} H_{n-1})\| = |\epsilon|^{-(n-1)} \|(f - G_{n-1} H_{n-1})\| \leq \delta^{-(n-1)} \delta^{n-1} = 1,$$

es decir, $\epsilon^{-(n-1)}(f - G_{n-1}H_{n-1}) \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$, llamaremos a este polinomio p_{n-1}.

Por el algoritmo de división, como G_1 es mónico, existen $q_{n-1}, t_{n-1} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ tal que

$$p_{n-1}S = q_{n-1}G_1 + t_{n-1}, \ \deg t_{n-1} \leq \deg G_1.$$

Escribamos

$$p_{n-1}R + q_{n-1}H_1 = c_m X^m + \ldots + c_0$$

con $c_0, \ldots, c_m \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$. Definamos

$$u_{n-1} = \overline{c_m} X^m + \ldots + \overline{c_0}$$

donde

$$\overline{c_i} = \begin{cases} c_i & , \delta < |c_i| \\ 0 & , \ |c_i| \leq \delta. \end{cases}$$

Se sigue que

$$p_{n-1}R + q_{n-1}H_1 - u_{n-1} = (c_m - \overline{c_m})X^m + \ldots + (c_0 - \overline{c_0})$$

donde

$$c_i - \overline{c_i} = \begin{cases} c_i - c_i = 0 & , \delta < |c_i| \\ c_i - 0 = c_i & , \ |c_i| \leq \delta. \end{cases}$$

Se sigue que

$$\|p_{n-1}R + q_{n-1}H_1 - u_{n-1}\| \leq \delta.$$

Luego, esto último junto con (1.3) implica que

$$\begin{aligned}
& \|p_{n-1} - G_1 u_{n-1} - H_1 t_{n-1}\| \\
= \ & \|p_{n-1}(1 - RG_1 - SH_1) + p_{n-1}RG_1 + p_{n-1}SH_1 - G_1 u_{n-1} - H_1 t_{n-1}\| \\
= \ & \|p_{n-1}(1 - RG_1 - SH_1) + p_{n-1}RG_1 + (q_{n-1}G_1 + t_{n-1})H_1 - G_1 u_{n-1} - H_1 t_{n-1}\| \\
= \ & \|p_{n-1}(1 - RG_1 - SH_1) + p_{n-1}RG_1 + q_{n-1}G_1 H_1 - G_1 u_{n-1}\| \\
= \ & \|p_{n-1}(1 - RG_1 - SH_1) + G_1(p_{n-1}R + q_{n-1}H_1 - u_{n-1})\| \\
\leq \ & \max\{\|p_{n-1}(1 - RG_1 - SH_1)\|, \|G_1(p_{n-1}R + q_{n-1}H_1 - u_{n-1})\|\} \\
\leq \ & \max\{\|p_{n-1}\|\|1 - RG_1 - SH_1\|, \|G_1\|\|p_{n-1}R + q_{n-1}H_1 - u_{n-1}\|\} \\
\leq \ & \max\{\|1 - RG_1 - SH_1\|, \|p_{n-1}R + q_{n-1}H_1 - u_{n-1}\|\} \\
\leq \ & \delta
\end{aligned}$$

Ahora, usando (1.4) tenemos

$$
\begin{aligned}
&\|p_{n-1} - G_{n-1}u_{n-1} - H_{n-1}t_{n-1}\| \\
= \ & \|p_{n-1} - G_{n-1}u_{n-1} - H_{n-1}t_{n-1} - G_1u_{n-1} + G_1u_{n-1} - H_1t_{n-1} + H_1t_{n-1}\| \\
= \ & \|p_{n-1} - G_1u_{n-1} - H_1t_{n-1} - G_{n-1}u_{n-1} + G_1u_{n-1} - H_{n-1}t_{n-1} + H_1t_{n-1}\| \\
= \ & \|p_{n-1} - G_1u_{n-1} - H_1t_{n-1} + (G_1 - G_{n-1})u_{n-1} + (H_1 - H_{n-1})t_{n-1}\| \\
\leq \ & \max\{\|p_{n-1} - G_1u_{n-1} - H_1t_{n-1}\|, \|(G_1 - G_{n-1})u_{n-1}\|, \|(H_1 - H_{n-1})t_{n-1}\|\} \\
\leq \ & \max\{\|p_{n-1} - G_1u_{n-1} - H_1t_{n-1}\|, \|G_1 - G_{n-1}\|\|u_{n-1}\|, \|H_1 - H_{n-1}\|\|t_{n-1}\|\} \\
\leq \ & \max\{\|p_{n-1} - G_1u_{n-1} - H_1t_{n-1}\|, \|G_1 - G_{n-1}\|, \|H_1 - H_{n-1}\|\} \\
\leq \ & \delta
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
\|p_{n-1} - G_{n-1}u_{n-1} - H_{n-1}t_{n-1}\| \leq \delta \tag{1.5}
$$

Luego, usando esto obtenemos que

$$
\begin{aligned}
\|f - G_nH_n\| &= \|f - (G_{n-1} + \epsilon^{n-1}t_{n-1})(H_{n-1} + \epsilon^{n-1}u_{n-1}) \\
&= \|f - G_{n-1}H_{n-1} - \epsilon^{n-1}(G_{n-1}u_{n-1} + H_{n-1}t_{n-1}) - \epsilon^{2n-2}t_{n-1}u_{n-1}\| \\
&= \|\epsilon^{n-1}p_{n-1} - \epsilon^{n-1}(G_{n-1}u_{n-1} + H_{n-1}t_{n-1}) - \epsilon^{2n-2}t_{n-1}u_{n-1}\| \\
&\leq \max\{\|\epsilon^{n-1}(p_{n-1} - G_{n-1}u_{n-1} - H_{n-1}t_{n-1})\|, \|\epsilon^{2n-2}t_{n-1}u_{n-1}\|\} \\
&\leq \max\{|\epsilon|^{n-1}\|p_{n-1} - G_{n-1}u_{n-1} - H_{n-1}t_{n-1}\|, |\epsilon|^{2n-2}\|t_{n-1}u_{n-1}\|\} \\
&\leq \max\{\delta^{n-1}\delta, \delta^{2n-2}\} \\
&= \delta^n
\end{aligned}
$$

Esto prueba el item i. Falta probar que G_n, H_n satisfacen el item iv. Por hipótesis inductiva, $\deg g = \deg G_1 = \deg G_{n-1}$. Por la construcción de t_{n-1}, $\deg t_{n-1} < \deg G_1 = \deg G_{n-1}$. Por la construcción de G_n, $\deg G_n = \deg G_{n-1}$. Así,

$$
\deg g = \deg G_{n-1} = \deg G_n
$$

y

$$
\deg f \geq \deg G_n + H_n > \deg t_{n-1} + \deg H_{n-1}.
$$

Ahora, supongamos que $\deg G_n + \deg H_n > \deg f$. Junto con la hipótesis inductiva

$$\deg H_n > \deg f - \deg G_n = \deg f - \deg G_{n-1} \geq \deg H_{n-1}.$$

De donde,

$$\deg u_{n-1} = \deg\left(\epsilon^{-(n-1)}(H_n - H_{n-1})\right) = \deg H_n > \deg H_{n-1}.$$

Esto implica que u_{n-1} es no nulo. Luego,

$$\deg f \leq \deg G_{n-1} + \deg H_{n-1} < \deg G_{n-1} + \deg u_{n-1}.$$

Además, por la definición e hipótesis inductiva item d, $\deg p_{n-1} \geq \deg f$. Los datos,

$$\deg f < \deg G_{n-1} + \deg u_{n-1},\ \deg f \geq \deg t_{n-1} + \deg H_{n-1},$$

$$\deg f \geq \deg p_{n-1},\ u_{n-1} = \overline{c_m}X^m + \ldots + \overline{c_0},\ \overline{c_m} \neq 0,\ G_{n-1} \text{ es mónico}$$

implican que

$$p_{n-1} - G_{n-1}u_{n-1} - H_{n-1}t_{n-1}$$

tiene coeficiente líder $-\overline{c_m}$. Por la definición de $\overline{c_m}$, tenemos que

$$\|p_{n-1} - G_{n-1}u_{n-1} - H_{n-1}t_{n-1}\| \geq |-c_m| = |c_m| > \delta.$$

Esto contradice (1.5). Por tanto nuestra suposición no es correcta, es decir, $\deg G_n + \deg H_n \leq \deg f$. Esto termina la construcción de la secuencias $(G_n)_n$ y $(H_n)_n$.

Finalmente, probemos lo pedido.

El item ii y la proposición 1.1.3, implican que $(G_n)_n$ y $(H_n)_n$ son secuencias de Cauchy. Por el item iv podemos escribir $r = \deg g, s = \deg f$,

$$G_n = X^r + a_{n,r-1}X^{r-1} + \ldots + a_{n,0} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X],$$

$$H_n = b_{n,s}X^s + b_{n,s-1}X^{s-1} + \ldots + b_{n,0} \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X],$$

$a_{n,r} = 1$ y el resto de $a_{i,j}, b_{i,j}$ iguales a cero. $b_{n,s}$ no es necesariamente igual a cero.

Entonces, las secuencias $(a_{n,i})_n$, $(b_{n,i})_n$ son secuencias de Cauchy. Como $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ es completo, $(a_{n,i})_n$, $(b_{n,i})_n$ convergen, digamos a $a_i, b_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ respectivamente. Vemos que $a_r = 1$, $a_i = 0\ \forall i > r$ y $b_i = 0\ \forall i > s$.

Denotemos

$$G = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \ldots + a_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X],$$

$$H = b_sX^s + b_{s-1}X^{s-1} + \ldots + b_0 \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X].$$

Entonces, $\lim G_n = G, \lim H_n = H$. Notemos que $r = \deg G = \deg G_n = \deg g$ y G es mónico. Esto prueba la existencia de G, H y que cumplen el item c.

Por el item i, haciendo $n \to +\infty$, tenemos que $f = \lim_n G_nH_n = GH$. Esto prueba que cumplen el item a.

Del item iii, $\overline{G_n} = \overline{G_1} = g, \overline{H_n} = \overline{H_1} = h$. Luego, $G_n - G_1, H_n - H_1 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}[X]$. Como $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$ es cerrado, por ser bola abierta y la proposición 1.1.2, haciendo $n \to +\infty$, $G - G_1, H - H_1 \in \mathfrak{m}_{\mathbb{K}}[X]$. De donde, $\overline{G} = \overline{G_1} = g, \overline{H} = \overline{H_1} = h$. Esto prueba que cumplen el item b.

Esto termina la prueba. $\square$

Corolario 1.5.1. *Sea $f(X) = a_nX^n + \ldots + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ irreducible. Entonces*

$$\|f\| = \max\{|a_n|, |a_0|\}.$$

Demostración. Escojamos m tal que $\|f\| = |a_m|$, es el máximo entre $|a_n|, \ldots, |a_0|$. Se sigue que $|a_m^{-1}a_i| \leq 1$ son lo coeficientes de $a_m^{-1}f$ y su coeficiente m es exactamente 1. Esto es, $a_m^{-1}f \in \mathcal{O}_{\mathbb{K}}[X]$ y $\|a_m^{-1}f\| = 1$. Entonces, pasando a $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}/m_{\mathbb{K}}$ podemos factorizar $\overline{a_m^{-1}f} = gh$ con g un polinomio mónico y h una constante. Aplicando el Lema de Hensel, $a_m^{-1}f = GH$ con $\deg G = \deg g = \deg \overline{a_m^{-1}f}$. De donde $f = a_mGH$.

En este punto, supondremos que la suposición del corolario es falsa, es decir,

$$\|f\| = |a_m| > \max\{|a_n|, |a_0|\}$$

con $m \neq 0, n$. Luego $a_m^{-1}f$ tiene coeficientes $0, n$ en $\mathfrak{m}_{\mathbb{K}}$ y coeficiente m igual a 1. Esto implica que $\overline{a_m^{-1}f}$ es no nulo con grado $\neq 0, n$. Entonces G es no nulo de grado $\neq 0, n$. De donde $f = a_mGH$ es una factorización no trivial, contradiciendo que f es irreducible. $\square$

Proposición 1.5.4. *Sea $\mathbb{F}$ una extensión algebraica de $\mathbb{K}$. Entonces existe un único valor absoluto ultramétrico en $\mathbb{F}$ que extiende al valor absoluto de $\mathbb{K}$.*

Demostración. Comencemos probando que si existe una extensión de $|\cdot|$ a todo $\mathbb{F}$, entonces es único. En efecto, sean $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ valores absolutos de $\mathbb{F}$ que extienden $|\cdot|$. Por la proposición 1.4.3, existen $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1\|x^n\|_1 \leq \|x^n\|_2 \leq C_2\|x^n\|_1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in \mathbb{K}.$$

Elevando a la $1/n$,

$$C_1^{1/n}\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2^{1/n}\|x\|_1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+, \forall x \in \mathbb{K}.$$

Haciendo $n \to +\infty$ tenemos que $\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$ $\forall x \in \mathbb{K}$. De donde, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son iguales.

Paseremos a probar que $|\cdot|$ puede extenderser a $\mathbb{F}$. Primero supondremos que $\mathbb{F}$ es extensión finita de $\mathbb{K}$. Dado $x \in \mathbb{F}$, denotemos $p_x(X) \in \mathbb{K}[X]$ el polinómio mónico irreducible sobre $\mathbb{K}$, $n = \deg f_x$ y $m = [\mathbb{F} : \mathbb{K}]$.

Definamos la función, que será candidato a extender $|\cdot|$, como

$$\begin{array}{rcccc} \|\cdot\| & : & \mathbb{F} & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & & x & \longmapsto & |N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(x)|^{1/m} = |f_x(0)|^{1/n}. \end{array}$$

Probemos que $\|\cdot\|$ es valor absoluto ultramétrico extendiendo a $|\cdot|$. Sean $x, y \in \mathbb{F}$, entonces

a) $\|x\| = |x|$ $\forall x \in \mathbb{K}$:

   Para $x \in \mathbb{K}$, tenemos que $f_x(X) = X - x$. Luego $\|x\| = |f_x(x)|^{1/1} = |-x| = |x|$.

b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$:

   $\|x\| = |N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(x)|^{1/m} = 0 \iff N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(x) = 0 \iff x = 0.$

c) $\|xy\| = \|x\|\|y\|$:

   $\|xy\| = |N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(xy)|^{1/m} = |N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(x)N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(y)|^{1/m} = |N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(x)|^{1/m}|N_{\mathbb{F}/\mathbb{K}}(y)|^{1/m} = \|x\|\|y\|.$

d) Si $\|x\| \leq 1$, entonces $\|1 + x\| \leq 1$:

   Denotemos $f_x(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$. Luego,
   $\|x\| = |f_x(0)|^{1/n} = |a_0|^{1/n} \leq 1$, implica que $|a_0| \leq 1$. Además, como f_x es mónico

irreducible, entonces $f_x(X-1)$ es también mónico irreducible anulando a $1+x$. Entonces $f_{1+x}(X) = f_x(1+X)$. Entonces, usando el lema 1.5.1

$$\begin{aligned}
\|1+x\| &= |f_{1+x}(0)|^{1/n} \\
&= |f_x(-1)|^{1/n} \\
&= |(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \ldots + a_0|^{1/n} \\
&\leq (\max\{1, |a_{n-1}|, \ldots, |a_0|\})^{1/n} \\
&= \|f_x\|^{1/n} \\
&= (\max\{1, |a_0|\})^{1/n} \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

Por la proposición 1.2.3, $\|\cdot\|$ es un valor absoluto ultramétrico. Así, hemos probado que si $\mathbb{F}$ es extensión finita de $\mathbb{K}$ existe un valor absoluto extendiendo $|\cdot|$.

Ahora pasaremos al caso general. Sea $\mathbb{F}$ extensión algebraica arbitraria de $\mathbb{K}$. Para $x \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{K}$, por el caso anterior existe un valor absoluto $|\cdot|_x$ en $\mathbb{K}(x)$. De esta manera podemos definir la función $\|\cdot\| : \mathbb{F} \to [0, +\infty)$, como

$$\|x\| = \begin{cases} |x| & , \ x \in \mathbb{K} \\ |x|_x & , \ x \in \mathbb{F} \setminus \mathbb{K} \end{cases}$$

Esta función es un valor absoluto en $\overline{\mathbb{K}}$. En efecto, sean $x, y \in \mathbb{K}$.

a) $\|x\| = 0 \iff x = 0$:

Tenemos $\|0\| = |0| = 0$. Recíprocamente, sea $x \in \mathbb{F}$ tal que $\|x\| = 0$. Si $x \notin \mathbb{K}$, entonces $|x|_x = \|x\| = 0$, luego $x = 0$. Contradicción con $x \notin \mathbb{K}$. Luego $x \in \mathbb{K}$, así $|x| = \|x\| = 0$, luego $x = 0$.

b) $\|xy\| = \|x\|\|y\|$ y $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$:

Como $\mathbb{K}(x)$ y $\mathbb{K}(y)$ contienen a $\mathbb{K}(xy)$ y $\mathbb{K}(x+y)$, y todos son extensiones finitas de $\mathbb{K}$, por la unicidad de la extensión del valor absoluto $|\cdot|$, probado inicialmente, tenemos que $|\cdot|_x$, $|\cdot|_y$, $|\cdot|_{xy}$ y $|\cdot|_{x+y}$ coinciden en las intersecciones respectivas. Luego,

$$\|xy\| = |xy|_{xy} = |x|_{xy}|y|_{xy} = |x|_x|y|_y = \|x\|\|y\|,$$

$$\|x+y\| = |x+y|_{x+y} \le \max\{|x|_{x+y}, |y|_{x+y}\} = \max\{|x|_x, |y|_y\} = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Así hemos terminado. $\square$

Lema 1.5.1. *Sean $\mathbb{F}$ una extensión algebraica de $\mathbb{K}$ y $\sigma : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{K}}$ un homomorfismo de campos que fija los elementos de $\mathbb{K}$. Entonces, $|x| = |\sigma(x)|$ para todo $x \in \mathbb{F}$.*

Demostración. Por la proposición 1.5.4, basta probar que $\|\cdot\| : \mathbb{F} \to [0, +\infty)$, definido como $\|x\| = |\sigma(x)|$, es valor absoluto ultramétrico en $\mathbb{F}$ que extiende $|\cdot|$ restricto a $\mathbb{K}$. Sean $x, y \in \mathbb{F}$, entonces:

a) $\|x\| = |x| \ \forall x \in \mathbb{K}$.

Esto se debe a que σ fija los elementos de $\mathbb{K}$.

b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$:

$\|x\| = 0 \iff |\sigma(x)| = 0 \iff \sigma(x) = 0 \iff x = 0.$

c) $\|xy\| = \|x\|\|y\|$:

$\|xy\| = |\sigma(xy)| = |\sigma(x)\sigma(y)| = |\sigma(x)||\sigma(y)| = \|x\|\|y\|.$

d) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$:

$\|x+y\| = |\sigma(x+y)| = |\sigma(x) + \sigma(y)| \le \max\{|\sigma(x)|, |\sigma(y)|\} = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$

Esto prueba que $\|\cdot\|$ es valor absoluto ultramétrico en $\mathbb{F}$. $\square$

A partir de ahora, hasta que termina la sección, supondremos que $\mathbb{K}$ es un campo ultramétrico completo de característica 0 y $\mathbb{F}$ un campo de extensión finita de $\mathbb{K}$.

Proposición 1.5.5 (Lema de Krasner)**.** *Sea $a \in \overline{\mathbb{K}}$. Entonces existe $r > 0$ tal que para todo b en la bola abierta $B(a, r)$ en $\overline{\mathbb{K}}$ se tiene que $\mathbb{F}(a) \subseteq \mathbb{F}(b)$.*

Demostración. Si $a \in \mathbb{F}$, es inmediato. Si $a \notin \mathbb{F}$, sean $a_1, \dots, a_n \in \overline{\mathbb{K}}$ todos los conjugados de a en $\mathbb{F}$ distintos del propio a y $r = \min_{i=1,\dots,n} \{|a_i - a|\} > 0$ (aquí usamos que la característica es 0). Sea $b \in B(a, r)$ arbitrario. Vamos a probar que a no tiene conjugados en $\mathbb{F}(b)$. Para esto consideremos un homomofismo de campos $\sigma : \mathbb{F}(a, b) \to \overline{\mathbb{K}}$

que fija los elementos de $\mathbb{F}(b)$, existe uno por cada conjugado de a en $\mathbb{F}(b)$. Supongamos que σ no es la identidad. Esto último es equivalente a que $\sigma(a) \neq a$. También, como $\sigma(a)$ es un conjugado de a en $\mathbb{F}(b)$, entonces, $\sigma(a)$ es conjugado de a en $\mathbb{F}$. Luego

$$|a - b| < r \leq |\sigma(a) - a|. \tag{1.6}$$

Notemos que

$$|\sigma(a) - b| = |\sigma(\alpha) - \sigma(\beta)| = |\sigma(\alpha - \beta)| = |\alpha - \beta|, \tag{1.7}$$

donde la última igualdad es por el lema 1.5.1. Pero

$$\begin{aligned}
|\sigma(\alpha) - \alpha| &= |\sigma(\alpha) - \beta + \beta - \alpha| \\
&\leq \max\{|\sigma(\alpha) - \beta|, |\beta - \alpha|\} \\
&= \max\{|\alpha - \beta|, |\beta - \alpha|\} \\
&= |\alpha - \beta|,
\end{aligned}$$

la penúltima desigualdad se sigue de (1.7). Lo obtenido se contradice con (1.6). Se sigue que nuestra suposición es falsa y en consecuencia α no tiene conjugados en $\mathbb{F}(\beta)$. Esto significa que $\alpha \in \mathbb{F}(\beta)$. Terminó la prueba. □

Proposición 1.5.6 (Continuidad de Raíces de Ecuaciones). *Fijemos $a \in \overline{\mathbb{K}}$ algebraico sobre K de grado n. Sea $f \in \mathbb{F}[X]$ el polinomio mónico irreducible de a sobre $\mathbb{F}$. Entonces existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $g \in \mathbb{F}[X]$ mónico de grado n con $\|f - g\| < \epsilon$ tiene una raíz $b \in \mathbb{F}(a)$ tal que $\mathbb{F}(b) = \mathbb{F}(a)$.*

Demostración. Sea polinomio mónico $g \in \mathbb{F}[X]$ de grado n arbitrario y su factorización $g(X) = (X - b_1) \ldots (X - b_n) \in \overline{\mathbb{K}}[X]$. Definamos $M = \max\{1, |a|, \ldots, |a|^{n-1}\}$. Entonces

$$\prod_{i=1}^{n} |a - b_i| = \left|\prod_{i=1}^{n} (a - b_i)\right| = |g(a)| = |g(a) - f(a)|.$$

Escribamos $f - g = c_{n-1}X^{n-1} + \ldots + c_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} |a - b_i| &= |g(a) - f(a)| \\
&= |c_{n-1}a^{n-1} + \ldots + c_0| \\
&\leq \max\{|c_{n-1}a^{n-1}|, \ldots, |c_0|\} \\
&= \max\{|c_{n-1}|, \ldots, |c_0|\} \max\{|a^{n-1}|, \ldots, 1\} \\
&\leq \|f - g\| M
\end{aligned}$$

De donde, para al menos un índice k se debe tener

$$|a - b_k| \leq \|f - g\|^{1/n} M^{1/n},$$

o equivalentemente

$$b_k \in B(a, \|f - g\|^{1/n} M^{1/n}) \text{ en } \overline{\mathbb{K}}.$$

Escogemos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que $\|f - g\| < \epsilon$ implica que $\mathbb{F}(a) \subseteq \mathbb{F}(b_k)$. Esto último junto con el hecho que a y b_k son raíces de polinomios en $\mathbb{F}[X]$ de grado n, implica que $\mathbb{F}(a) = \mathbb{F}(b_k)$. $\square$

1.6 Espacios esféricamente completos

En esta sección estudiaremos brevemente los espacios métricos esféricamente completos y campos esféricamente completos.

Como motivación para la definición central de esta sección vamos a probar un resultado sobre espacios completos.

Proposición 1.6.1. *Un espacio métrico X es completo, si y solo si, toda secuencia decreciente de bolas cerradas en X con radios tendiendo a cero tiene intersección no vacía.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $(B[x_n, r_n])_n$ secuencia decreciente de bolas cerradas en X con $\lim_n r_n = 0$. Afirmamos que $(x_n)_n$ es secuencia de Cauchy. En efecto, dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $r_k < \epsilon$ $\forall k \geq N$. Sean $m \geq n \geq N$, como $B[x_m, r_m] \subseteq B[x_n, r_n]$, se sigue

$$d(x_n, x_m) \leq r_n < \epsilon \quad \forall m \geq n \geq N. \tag{1.8}$$

Esto prueba que $(x_n)_n$ es una secuencia de Cauchy. Desde que X es completo, existe el límite de $(x_n)_n$, digamos que es $x \in X$. Haciendo $m \to +\infty$ en (1.8) tenemos $d(x_n, x) \leq r_n$ $\forall n \geq N$. Esto implica,

$$x \in \bigcap_{n \geq N} B[x_n, r_n] = \bigcap_{n \geq 1} B[x_n, r_n],$$

ya que la secuencia $(B[x_n, r_n])_n$ es decreciente.

$\Leftarrow$) Sea $(x_n)_n$ una secuencia de Cauchy en X. Debemos probar que $(x_n)_n$ converge. Dado $k \in \mathbb{Z}^+$ existe $n_k \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < \frac{1}{k(k+1)}.$$

Afirmamos que $(B[x_{n_k}, 1/k])_k$ es decreciente. En efecto, dado $y \in B\left[x_{n_{k+1}}, 1/(k+1)\right]$ tenemos

$$d(y, x_{n_k}) \leq d(y, x_{n_{k+1}}) + d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k}.$$

Esto significa que $y \in B\left[x_{n_k}, 1/k\right]$. Se sigue la afirmación. Por hipótesis, existe $z \in X$ en $B[x_{n_k}, 1/k]$ $\forall k \geq 1$. Haciendo $k \to +\infty$ se tiene que $\lim_k x_{n_k} = z$. Así tenemos que

$(x_n)_n$ es una secuencia de Cauchy con una subsecuencia convergente, entonces $(x_n)_n$ es convegente. □

Definición 1.6.1. Un espacio métrico es esféricamente completo si toda secuencia decreciente de bolas cerradas tiene intersección no vacía.

Corolario 1.6.1. *Se cumple:*

a) Todo espacio esféricamente completo es completo;

b) un espacio completo no es necesariamente esféricamente completo.

Demostración.

a) En la definición de esféricamente completo no es necesaria la condición de radios tendiendo a cero, que es usada en la proposición 1.6.1.

b) El campo completo $\mathbb{C}_p$, que veremos más adelante, no es esféricamente completo. □

El espacio $\mathbb{R}^n$ es esféricamente completo, debido al teorema intersección de Cantor.

Proposición 1.6.2. *Todo campo localmente compacto es esféricamente completo.*

Demostración. Para el caso no discreto, por la proposición 1.2.8 las bolas cerradas son compactas. Usamos el teorema de intersección de Cantor para probar lo pedido.

Para el caso discreto, el valor absoluto es trivial. Entonces las bolas cerradas son conjunto unitario o todo el campo. Así, la intersección de toda secuencia decreciente de bolas cerradas es un conjunto unitaria o todo el campo, y por tanto no vacío. □

Proposición 1.6.3. *Sea* $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ *un campo ultramétrico segundo numerable con* $|\mathbb{K}|$ *denso en* $[0, +\infty)$. *Entonces* $\mathbb{K}$ *no es esféricamente completo.*

Demostración. Sea $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$ subconjunto denso en $\mathbb{K}$. Escogemos números reales $r_1 > r_2 > \ldots > r > 0$. Vamos a construir una secuencia decreciente de bolas cerradas $(B_n)_n$ tal que radio de B_n es $r_n,\ x_n \notin B_n\ n \in \mathbb{Z}^+$.

Vamos probarlo por inducción sobre n. Para $n = 1$, podemos escoger B_1 como cualquier bola cerrada de radio r_1 no conteniendo x_1. Supongamos válido para $n \geq 1$. Probemos para $n + 1$. Escribamos B_n como $B[y_n, r_n]$. Tenemos dos casos:

Si $|y_n - x_{n+1}| > r_{n+1}$: Escogemos $B_{n+1} = B[y_n, r_{r+1}]$. Luego

$$B_{n+1} = B[y_n, r_{r+1}] \subseteq B[y_n, r_n] = B_n, \; x_{n+1} \notin B[y_n, r_{r+1}] = B_{n+1}.$$

Si $|y_n - x_{n+1}| \leq r_{n+1}$: Por densidad de $|\mathbb{K}|$ en $[0, +\infty)$ existe $z \in \mathbb{K}$ tal que

$$|y_n - x_{n+1}| \leq r_{n+1} < |z| < r_n.$$

Escogemos $B_{n+1} = B[y_n + z, r_{n+1}]$. Luego, de la última desigualdad, que $y_n + z \in B[y_n, r_n]$. Entonces

$$B_n = B[y_n, r_n] = B[y_n + z, r_n] \subseteq B[y_n + z, r_{n+1}] = B_{n+1},$$

y $x_{n+1} \notin B_{n+1} = B[y_n + z, r_{n+1}]$, ya que

$$|y_n + z - x_{n+1}| = |y_n - x_{n+1} + z| = \max\{|x_{n+1} - y_n|, |z|\} = |z| > r_{n+1}.$$

Esto prueba la construcción de $(B_n)_n$ con las propiedades pedidas.

Supongamos que $\mathbb{K}$ es esféricamente completo. Entonces existe $x \in B_n \; \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Esto implica que $B_n = B[x, r_n] \; \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Luego $B[x, r]$ está contenido en todos los B_n's. Como $x_n \notin B_n$, entonces $x_n \notin B[x, r] \; \forall n \in \mathbb{Z}^+$. Esto contradice la densidad de $\{x_n : n \in \mathbb{Z}^+\}$. Por tanto $\mathbb{K}$ no es esféricamente completo. $\square$

Capítulo 2

Los campos p-ádicos

Esta es el capítulo central del trabajo, en el cual usaremos toda la maquinaria presentada en capítulo 1. Haremos las construcciones de los campos $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\mathbb{Q}_p}$, Ω_p y $\mathbb{C}_p$, tomando como punto de parte el campo $\mathbb{Q}$ con el valor absoluto p-ádico, como en [8]. También probaremos las propiedades de este campo, nos apoyaremos con [6], [9] y [10].

2.1 El campo p-ádico $\mathbb{Q}$

En esta sección clasificaremos los valores absolutos ultramétricos en $\mathbb{Q}$, además de analizar la completitud de $\mathbb{Q}$. Recordemos que es bien sabido que $\mathbb{Q}$ no es algebraicamente cerrado, por ejemplo, no podemos resolver $X^2 = 2$.

Proposición 2.1.1. *Dado $|\cdot|$ valor absoluto ultramétrico no trivial en $\mathbb{Q}$. Entonces $|\cdot|$ es equivalente al valor absoluto p-ádico para algún $p \in \mathbb{Z}^+$ primo.*

Demostración. Por la proposición 1.2.6 el ideal $\mathfrak{m} = \{m \in \mathbb{Z} : |m| < 1\} = \mathfrak{m}_{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{Z}$ es un ideal primo de $\mathbb{Z}$. Luego existe $p \in \mathbb{Z}^+$ primo tal que $\mathfrak{m} = p\mathbb{Z}$. Como $|p| < 1$ podemos escribir $|p| = p^{-c}$ para algún $c > 0$. Dado $x \in \mathbb{Q} \setminus 0$, podemos escribirlo como

$$x = p^n \frac{a}{b}, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z} \text{ no divisibles por } p.$$

Como $a, b \in \mathbb{Z}$ no divisibles por p, entonces $a, b \notin \mathfrak{m}$, es decir, $|a| = |b| = 1$. Entonces

$$|x| = |p|^n \frac{|a|}{|b|} = p^{-cn}, |x|_p = p^{-n}.$$

De donde, $|x| = |x|_p^c$ para algún $c > 0$ y todo $x \in \mathbb{Q}$. (Para $x = 0$ es inmediato). Entonces $|\cdot|$ y $|\cdot|_p$ son equivalentes. $\square$

El resultado completo dice que todo valor absoluto en $\mathbb{Q}$ es el valor absoluto trivial o equivalente al valor absoluto p-ádico o equivalente al valor absoluto usual. Este resultado puede ser visto en [10].

Los valores absolutos no triviales son equivalentes a los valores absolutos p-ádicos y valor absoluto usual. Como las propiedades métricas y topológicas son las mismas para valores absolutos equivalentes, basta con estudiar los valores absolutos p-ádicos y el valor absoluto usual.

Proposición 2.1.2. *Dados $p, q \in \mathbb{Z}^+$ primos diferentes, entonces $|\cdot|_p$ y $|\cdot|_q$ no son valores absolutos equivalentes.*

Demostración. Supongamos que son equivalentes. Existe $c > 0$ tal que $|x|_p = |x|_q^c$ $\forall x \in \mathbb{Q}$. Para $x = 1$ tenemos $|p|_p = p^{-1}$, $|p|_q = 1$. De donde, $p^{-1} = |p|_p = |p|_q^c = 1^c = 1$. Lo cual es una contradicción. Por tanto $|\cdot|_p$ y $|\cdot|_q$ no pueden ser equivalentes. $\square$

Corolario 2.1.1. *El valor absoluto trivial, los valores absolutos p-ádicos y el valor absoluto usual, definen todos diferentes topologías en $\mathbb{Q}$.*

Demostración. por la observación 1.2.2 y la proposición 1.2.7, el valor absoluto trivial es el único valor absoluto que define una topología discreta. Por el corolario 1.2.2, el valor absoluto usual no es ultramétrico y por tanto, por el corolario 1.2.3, no puede ser equivalente a un valor absoluto p-ádico, y así su sus topologías no puede ser iguales, por la proposición 1.2.5. Los valores absolutos p-definen topologías diferentes por la proposición 2.1.2 y la proposición 1.2.5. $\square$

Proposición 2.1.3. $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ *no es completo $\forall p \in \mathbb{Z}^+$ primo.*

Esto implica, por el corolario 1.6.1, que $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ no es esféricamente completo y, por la proposición 1.6.2, $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ no es localmente compacto.

Demostración. Como $|\cdot|_p$ no es trivial, por la proposición 1.2.7, los puntos de $\mathbb{Q}$ no son abiertos, por ser todos puntos de acumulación. Entonces, expresando a $\mathbb{Q}$ como unión de sus puntos tenemos a $\mathbb{Q}$ como unión numerable de cerrados de interior vacío. Por el Teorema de la Categoría de Baire, $\mathbb{Q}$ no puede ser completo. $\square$

2.2 El campo $\mathbb{Q}_p$, la compleción de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$

En la sección anterior vimos que $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ no es ni completo ni algebraicamente cerrado. En esta sección a definir su compleción y estudiar las propiedades de esta compleción.

Definición 2.2.1. Sea $p \in \mathbb{Z}^+$ número primo. Definiremos la compleción de $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ como $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$, que es llamado el campo (ultramétrico) de los números p-ádicos. A partir de ahora, dejaremos entendido el valor absoluto $|\cdot|_p$.

Denotaremos por $\mathbb{Z}_p$ a la bola unitaria cerrada $\mathfrak{m}_{\mathbb{Q}_p}$ en $\mathbb{Q}_p$, que es llamado el anillo de los enteros p-ádicos.

Lema 2.2.1. *Dado $x \in \mathbb{Q}_p$ y $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que:*

a) $|\mathbb{Q}_p|_p = p^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$*;*

b) $B[x, p^n] = B(x, p^{n+1})$.

Demostración. Para probar el item a), recordemos que se cumple en $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$. El item b) no es sorpresa que las bolas sean abiertas y cerradas a la vez, por 1.1.2, pero aquí obtenemos una igualdad explícita.

a) Por definición de x, existe una secuencia (x_n) en $\mathbb{Q}$ tal que $x_n \to x$. Como $|x_n|_p \in p^{\mathbb{Z}} \cup 0$, $|x_n|_p$ es convergente y 0 es el único punto de acumulación en $\mathbb{R}$ de $p^{\mathbb{Z}} \cup 0$, entonces, $|x_n|_p \to |x|_p \in p^{\mathbb{Z}} \cup 0$.

b) Si $p^n < p^{n+1}$, entonces $B[x, p^n] \subseteq B(x, p^{n+1})$. Recíprocamente, sea $y \in B(x, p^{n+1})$, es decir, $|x - y|_p < p^{n+1}$. Por el item a), necesariamente se debe tener que $|x - y|_p \leq p^n$, esto es, $y \in B[x, p^n]$. Termina la prueba. $\square$

Proposición 2.2.1. $\mathbb{Z}_p$ *tiene las siguientes propiedades:*

a) $\mathbb{Z}$ *es denso* $\mathbb{Z}_p$*,*

b) $\mathbb{Z}_p$ *es compacto.*

Esto implica, por la proposición 1.2.8, que $\mathbb{Q}_p$ es localmente compacto no discreto y por la proposición 1.6.2 es esféricamente completo.

Demostración. Sea $\epsilon > 0$. Fijemos $k \in \mathbb{Z}^+$ tal que $p^{-k} < \epsilon$.

a) Sea $x \in \mathbb{Z}_p$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}_p$, por definición, existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $|x-y|_p < p^{-k}$. Luego,

$$|y|_p = |x - x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |x-y|_p\} \leq \max\{1, p^{-k}\} \leq 1.$$

Escribimos $y = p^n a/b$ con $a, b, n \in \mathbb{Z}$, a, b no divisibles por p. De aquí, $|y|_p = p^{-n} \leq 1$, esto significa que $n \geq 0$. Ahora, como b, p son primos entre si, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tal que $1 = \alpha b + \beta p^k$. Luego,

$$y = p^n \frac{a}{b} = p^n \frac{a}{b}(\alpha b + \beta p^k) = p^n a\alpha + \frac{a}{b}\beta p^{k+n},$$

de donde $y - p^n a\alpha = \dfrac{a}{b}\beta p^{k+n}$. Aplicando $|\cdot|_p$, tenemos que $p^n a\alpha \in \mathbb{Z}$ y

$$|y - p^n a\alpha|_p = \left|\frac{a}{b}\beta p^{k+n}\right|_p \leq p^{-(k+n)} \leq p^{-k} < \epsilon,$$

ya que $a, b, n \in \mathbb{Z}$ y a, b no divisibles por p. Esto implica que $\mathbb{Z}$ es denso en $\mathbb{Z}_p$.

b) Como $\mathbb{Z}_p$ es cerrado de $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{Q}_p$ es completo, se tiene que $\mathbb{Z}_p$ es completo. Solo debemos probar que $\mathbb{Z}_p$ es totalmente acotado. En efecto, dado $x \in \mathbb{Z}$, por el algoritmo de división, existen $q, r \in \mathbb{Z}$ tal que

$$x = qp^{k-1} + r, \quad r \in \{0, \ldots, p^{k-1} - 1\}.$$

De aquí, $|x - r|_p = |qp^{k-1}|_p \leq p^{-k-1}$. Luego $x \in B[r, p^{-k-1}]$ para algún r. Se sigue que

$$\mathbb{Z} \subseteq \bigcup_{r=0}^{p^{k-1}-1} B[r, p^{-k-1}].$$

Por el lema 2.2.1 y aplicando cerradura

$$\mathbb{Z}_p = \overline{\mathbb{Z}} \subseteq \bigcup_{r=0}^{p^{k+1}-1} \overline{B[r, p^{-k-1}]} = \bigcup_{r=0}^{p^{k-1}-1} B[r, p^{-k-1}] = \bigcup_{r=0}^{p^{k+1}-1} B(r, p^{-k}) \subseteq \bigcup_{r=0}^{p^{k+1}-1} B(r, \epsilon).$$

Esto implica que $\mathbb{Z}_p$ es totalmente acotado. Termina así la prueba. $\square$

Proposición 2.2.2. *$\mathbb{Q}_p$ no es algebraicamente cerrado.*

Demostración. Sea $m \geq 2$ en $\mathbb{Z}$. Consideremos la ecuación $f(X) = X^m - p \in \mathbb{Q}_p[X]$. Supongamos que podemos resolver f en $\mathbb{Q}_p$, existe $b \in \mathbb{Q}_p$ tal que $b^m = p$. Aplicando $|\cdot|_p$, tenemos $|b|_p^m = |b^m|_p = |p|_p = p^{-1}$. Luego, $|b|_p = p^{-1/m}$; pero, por el lema 2.2.1 item a), deberíamos tener $|b|_p \in p^{\mathbb{Z}} \cup 0$. Tenemos una contradición, probando lo pedido. $\square$

Lema 2.2.2. *Sea $(a_n)_n$ secuencia en $\mathbb{Z}_p$ con índices en $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, entonces la serie secuencia $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i p^i\right)_n$ converge en $\mathbb{Z}_p$. El límite se denota como $\sum_{i\geq 0} a_i p^i$.*

Demostración. Usaremos la proposición 1.1.3. Como

$$\left|\sum_{i=1}^{n+1} a_i p^i - \sum_{i=1}^{n} a_i p^i\right| = \left|a_{n+1}p^{n+1}\right| \leq p^{-(n+1)}$$

y $\lim_n p^{n+1} = 0$ en $\mathbb{R}$, debemos tener que $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i p^i\right)_n$ es secuencia de Cauchy en $\mathbb{Z}_p$, y por la completitud de $\mathbb{Z}_p$, converge en $\mathbb{Z}_p$. $\square$

Lema 2.2.3. *Denotemos $\mathcal{T}$ el conjunto de secuencias de $\{0, \ldots, p-1\}$ con índices en $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$. Definimos la función $f : \mathcal{T} \to \mathbb{Z}_p$, bien definida por el lema 2.2.2, como*

$$T((a_n)_n) = \sum_{n\geq 0} a_n p^n.$$

Entonces f es inyectiva.

De hecho, f es función biyectiva. Dando así una forma para expresar los elementos de $\mathbb{Z}_p$.

Demostración. Sean $(a_n)_n, (b_n)_n \in T$ tal que $f((a_n)_n) = f((b_n)_n)$. Esto significa que la secuencia

$$z_k = \sum_{n=0}^{k}(a_n - b_n)p^n \text{ converge a 0 y } (a_n - b_n) \in \{-(p-1), \ldots, p-1\}. \tag{2.1}$$

Notemos si $a_n \neq b_n$ entonces $|(a_n - b_n)p^n| = |a_n - b_n||p|^n = p^{-n}$.

Supongamos que $(a_n)_n \neq (b_n)_n$. Sea $l \geq 0$ menor tal que $a_l \neq b_l$. Entonces (2.1) indica que z_k tiene sumandos no nulos para $k \geq l$ y todos estos sumandos tienen valor absolutos todos diferentes dos a dos. Entonces para $k \geq l$

$$|z_k| = \left|\sum_{n=0}^{k}(a_n - b_n)p^n\right| = \left|\sum_{n=l}^{k}(a_n - b_n)p^n\right| = \max_{n=l,\ldots,k}\left\{\left|(a_n - b_n)p^{-n}\right|\right\} = p^{-l}.$$

Esto implica que $\lim_k |z_k| = p^l$, lo que contradice que $\lim_k z_k = 0$. Por tanto, f es inyectiva. $\square$

Proposición 2.2.3. *$\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Q}_p$ tiene cardinal $\aleph_1$.*

Demostración. Recordemos para punto en $\mathbb{Q}_p$ se le asocia muchas secuencias de Cauchy en $\mathbb{Q}$ que son diferentes para cada punto. Luego, tenemos la desigualdad

$$\text{cardinal}(\mathbb{Z}_p) \leq \text{cardinal}(\mathbb{Q}_p) \leq \text{cardinal}\left(\mathbb{Q}^{\mathbb{Z}^+}\right) = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Por el lema 2.2.3,

$$\text{cardinal}(\mathbb{Z}_p) \geq \text{cardinal}(\mathcal{T}) = \text{cardinal}\left(\{0, \ldots, p-1\}^{\mathbb{Z}^+}\right) = p^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Por tanto, $\text{cardinal}(\mathbb{Z}_p) \leq \text{cardinal}(\mathbb{Q}_p) = \aleph_1$. $\square$

Proposición 2.2.4. *$\mathbb{Q}_p$ es segundo numerable.*

Demostración. Por definición de compleción de $\mathbb{Q}_p$, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{Q}_p$. $\square$

Proposición 2.2.5. *$\mathbb{Q}_p$ no es isomorfismo a $\mathbb{R}$.*

Demostración. Supongamos que existe $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Q}_p$. Como p tiene raíz cuadrada en $\mathbb{R}$, entonces $p = f(p)$ debería tener raíz cuadrada en $\mathbb{Q}_p$. Pero ya vimos que esto no es posible. Por tanto $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$ no pueden ser isomorfos. $\square$

2.3 El campo $\overline{\mathbb{Q}_p}$, la clausura algebraica de $\mathbb{Q}_p$

En la sección anterior al construir el campo valuado completo $\mathbb{Q}_p$, nos encontramos con el problema que no es algebraicamente cerrado. Por este motivo vamos a construir un nuevo campo valuado extensión de $\mathbb{Q}_p$ usando la clausura algebraica.

Construcción 2.3.1. Por la proposición 1.5.4, podemos extender el valor absoluto $|\cdot|_p$ en $\mathbb{Q}_p$ a su clausura algebraica, $\overline{\mathbb{Q}_p}$. El valor absoluto extendido en $\overline{\mathbb{Q}_p}$ será denotado, también, $|\cdot|_p$. Igualmente que con $\mathbb{Q}_p$, dejaremos entendido el valor absoluto $|\cdot|_p$ en $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

Con este nuevo campo nos enfrentamos a un problema, que ya habíamos tenido anteriormente.

Lema 2.3.1. *Sea $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ tal que $[\mathbb{Q}_p(x) : \mathbb{Q}_p] \leq n$, entonces existe $f \in \mathbb{Z}_p[T] \setminus 0$ de grado menor o igual que n tal que $f(x) = 0$ y $f(T) = a_n T^n + \ldots + a_0$ con algún a_k igual a 1.*

Demostración. Sabemos que existe $g \in \mathbb{Q}_p[T] \setminus 0$ tal que $g(x) = 0$. Escribimos

$$g(T) = b_n T^n + \ldots + b_0.$$

Sea b_k tal que $|b_k| = \max_{j=1,\ldots,n} \{|b_j|\} > 0$ (los coeficientes no son todos nulos).
Consideremos el polinomio

$$f(T) = b_k^{-1} g(T) = b_k^{-1} b_n T^n + \ldots + b_k^{-1} b_0$$

que claramente es no nulo y se anula en x. Analizando los coeficientes, como $|b_k| \geq |b_i|$ $\forall i = 1, \ldots, n$, tenemos cuando $b_i \neq 0$ que

$$|b_k^{-1} b_i| = |b_k|^{-1} |b_i| \leq |b_i|^{-1} |b_i| = 1.$$

Cuando $b_i = 0$, entonces $b_k^{-1} b_i = 0$. Esto implica que los coeficientes de f están en $\mathbb{Z}_p$. Además el término de índice k de f es $b_k^{-1} b_k = 1$. $\square$

Proposición 2.3.1. *$\overline{\mathbb{Q}_p}$ es de primera categoría, esto es, existe una colección enumerable de cerrados de interior vacío $(F_n)_n$ de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ tal que $\overline{\mathbb{Q}_p} = \bigcup_n F_n$. En consecuencia, por el Teorema de Baire, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ no es completo.*

Igualmente como para $\mathbb{Q}$, la no completitud de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ implica que $\overline{\mathbb{Q}_p}$ no es esféricamente completo, por el corolario 1.6.1, ni localmente compacto, por la proposición 1.6.2.

Demostración. Para pobar esto, definamos los subconjuntos

$$X_n = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : \deg x = [\mathbb{Q}_p(x) : \mathbb{Q}_p] \leq n\} \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

El conjunto X_n puede reescribirse como,

$$X_n = \{x \in \overline{\mathbb{Q}_p} : x \text{ es raíz de un polinomio no nulo de grado} \leq n \text{ en } \mathbb{Q}_p\}.$$

Claramente $X_1 = \mathbb{Q}_p$. Como todos los elementos de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ son algebraicos sobre $\mathbb{Q}_p$, entonces todo elemento de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ está en algún X_n. Esto es, $\overline{\mathbb{Q}_p} = \cup_{n \geq 1} X_n$.

Se cumple que,

a) $X_n \neq \overline{\mathbb{Q}_p}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Escogemos $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ tal que $x^{n+1} = p$. Se cumple que $1, \ldots x^n$ son $\mathbb{Q}_p$-LI. En efecto, sean $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}_p$ tal que $a_0 + \ldots + a_n x^n = 0$. Como $x^{n+1} = p$, entonces $|x|_p^{-1/(n+1)}$. Luego, para cada $a_i \neq 0$

$$|a_i x^i|_p = |a_i|_p |x|_p^i \in p^{\mathbb{Z}} p^{-i/(n+1)} \subseteq p^{-i/(n+1)+\mathbb{Z}}, \quad i = 0, \ldots, n.$$

Entonces, $|a_i x^i|_p \neq |a_j| x^j$ para $i \neq j$, $a_i \neq 0$, $a_j \neq 0$. Entonces

$$0 = |0|_p = |a_0 + \ldots + a_n x^n|_p = \max_{i=0,\ldots,n} \{|a_i x^i|_p\}.$$

Así, $a_i = 0$ $\forall i = 0, \ldots, n$. Se sigue que $1, \ldots, x^n$ son $\mathbb{Q}_p$-LI.

Luego $[\mathbb{Q}_p(x), \mathbb{Q}_p] = n + 1$, y esto significa que, $x \notin X_n$. Por tanto, $X_n \neq \overline{\mathbb{Q}_p}$.

b) $\lambda X_n \subseteq X_n$ $\forall \lambda \in \mathbb{Q}_p$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

En efecto. Si $\lambda = 0$, es inmediato. Supongamos que $\lambda \neq 0$. Dado $x \in X_n$, existen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}_p$ no todo nulos tal que

$$a_n x^n + \ldots + a_0 = 0.$$

Multiplicando por λ^n,

$$a_n(\lambda x)^n + a_{n-1}\lambda(\lambda x)^{n-1} + \ldots + a_1\lambda^{n-1}(\lambda x) + a_0\lambda^n = 0.$$

Notemos que $a_n, a_{n-1}\lambda, \ldots, a_1\lambda^{n-1}, a_0\lambda^n \in \mathbb{Q}_p$ no todos nulos. Luego, $\lambda x \in X_n$.

c) $X_m + X_n \subseteq X_{mn}, \quad n, m \in \mathbb{Z}^+$.

En efecto. Sean $x \in X_m, y \in X_n$. Entonces

$$\begin{aligned}
[\mathbb{Q}(x+y), \mathbb{Q}_p] &\leq [\mathbb{Q}_p(x,y), \mathbb{Q}_p] \\
&= [\mathbb{Q}_p(x,y), \mathbb{Q}_p(y)][\mathbb{Q}_p(y), \mathbb{Q}_p] \\
&\leq [\mathbb{Q}_P(x), \mathbb{Q}_p][\mathbb{Q}_p(y), \mathbb{Q}_p] \\
&\leq mn
\end{aligned}$$

Esto prueba que $x + y \in X_{mn}$.

d) X_n es cerrado $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Sea $x \in \overline{X_n} \setminus 0$ y (x_k) secuencia en X_n tal que $x_k \to x$. Por el lema 2.3.1, existen $f_k \in \mathbb{Z}_p[T] \setminus 0$ de grado menor o igual n tal que $f_k(x_k) = 0$ y

$$f_k(T) = a_{n,k}T^n + a_{n-1,k}T^{n-1} + \ldots + a_{1,k}T + a_{0,k}$$

donde cada f_k tiene al menos un coeficiente igual a 1. Entonces, existe una subsecuencia de $(a_{j,k})_k$ para algún j fijo que tiene infinitos términos igual a 1. Por la proposición 2.2.1, $\mathbb{Z}_p$ es compacto, existen subsecuencias de cada $a_{i,k}$ convergentes. Así, pasando a subsecuencias podemos considerar cada $a_{i,k}$ convergente a $b_i \in \mathbb{Z}_p$ y algún $a_{j,k}$ convergente a $b_j = 1$. Luego, definamos el polinomio no nulo en $\mathbb{Z}_p[T]$

$$f(T) = b_nT^n + \ldots + b_0.$$

Notese que,

$$f_k(x_k) = a_{n,k}(x_k)^n + \ldots + a_{0,k} \to f(x) = b_n(x)^n + \ldots + b_0.$$

Como $f_k(x_k) = 0$ $\forall k \geq 1$, entonces $f_k(x_k) \to 0$. Así, tenemos $f \in \mathbb{Z}_p[T] \setminus 0$ de grado menor o igual n tal que $f(x) = 0$. Esto significa que $x \in X_n$.

Para completar, claramente $0 \in X_n$.

e) X_n tiene interior vacío $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Supongamos lo contrario. Existen $x \in X_n$ y $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq X_n$. Por b) y c),

$$B(0,r) \subseteq B(x,r) + \{-1\} \cdot \{x\} \subseteq X_n + \mathbb{Q}_p X_n \subseteq X_{n^2}.$$

Sea $y \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ arbitrario no nulo. Como $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$ es no discreto, podemos escoger $z \in B(0, r/|y|) \cap \mathbb{Q}$ no nulo. Notemos que $zy \in B(0,r)$. Entonces, por b)

$$y = z^{-1}(zy) \in \mathbb{Q}B(0,r) \subseteq \mathbb{Q}_p X_{n^2} \subseteq X_{n^2}.$$

Entonces, $\overline{\mathbb{Q}_p} \subseteq X_{n^2}$. Esto no es posible por a). Por tanto X_n no tiene punto interior $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

Los items d) y e) implican que X es un espacio de primera categoría. $\square$

Proposición 2.3.2. *$\overline{\mathbb{Q}_p}$ tiene cardinal $\aleph_1$.*

Demostración. Se sigue del hecho que un campo y su clausura tienen el mismo cardinal. $\square$

Proposición 2.3.3. *$\overline{\mathbb{Q}_p}$ es segundo numerable.*

Demostración. Repetiremos la prueba de Continuidad de Raíces.

Sean $x \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ y $\epsilon > 0$. Consideremos $f \in \mathbb{Q}_p[X]$ el polinomio mónico irreducible de x sobre $\mathbb{Q}_p$. Sea $g \in \mathbb{Q}[X]$ un polinomio del mismo grado que f que vamos a construir, y su factorización $g(X) = (X - a_1) \ldots (X - a_n) \in \overline{\mathbb{Q}_p}[X]$. Definamos $M = \max\{1, |x|, \ldots, |x|^{n-1}\}$. Entonces

$$\prod_{i=1}^{n} |x - a_i| = \left| \prod_{i=1}^{n} (x - a_i) \right| = |g(x)| = |g(x) - f(x)|.$$

Escribamos $f(X) - g(X) = b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n} |x - a_i| &= |g(x) - f(x)| \\
&= |b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + x_0| \\
&\leq \max\{|b_{n-1}x^{n-1}|, \ldots, |b_0|\} \\
&= \max\{|b_{n-1}|, \ldots, |b_0|\} \max\{|x^{n-1}|, \ldots, 1\} \\
&\leq \|f - g\| M
\end{aligned}$$

De donde, para al menos un índice k se debe tener

$$|a - b_k| \leq \|f - g\|^{1/n} M^{1/n},$$

o equivalentemente

$$b_k \in B(a, \|f - g\|^{1/n} M^{1/n}) \text{ en } \overline{\mathbb{Q}_p}.$$

Escogemos $\delta = \epsilon^n / M > 0$. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{Q}_p$, regresamos al principio y escogemos g tal que $\|f - g\| < \delta$. Esta ultima desigualdad implica

$$|a - b_k| \leq \|f - g\|^{1/n} M^{1/n} < \delta^{1/n} M^{1/n} = \left(\frac{\epsilon^n}{M}\right)^{1/n} M^{1/n} = \epsilon.$$

Finalmente notemos que $b_k \in \overline{\mathbb{Q}}$, por ser raíz de $g \in \mathbb{Q}[X]$. Esto prueba que $\overline{\mathbb{Q}}$ es denso en $\overline{\mathbb{Q}_p}$ y además $\overline{\mathbb{Q}}$ es numerable, por ser la clausura de $\mathbb{Q}$. Esto termina la prueba. $\square$

2.4 El campo esféricamente completo y algebraicamente cerrado Ω_p

El campo valuado $\overline{\mathbb{Q}_p}$ resultó no ser completo, pero si algebraicamente cerrado. En esta sección, lo más natural sería hacer la compleción, sin embargo, extenderemos $\overline{\mathbb{Q}_p}$ de una manera más radical que la campleción. Construiremos el campo esféricamente completo y algebraicamente cerrado Ω_p. Este procedimiento se puede realizar de una manera más general, ver [3].

Construcción 2.4.1. Definamos el conjunto

$$l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) = \{\text{Secuencias acotadas en } \overline{\mathbb{Q}_p}\}.$$

Definamos también las funciones

$$\begin{array}{cccc} + : & l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) \times l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) & \longrightarrow & l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) \\ & ((x_n)_n, (y_n)_n) & \longmapsto & (x_n + y_n)_n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) \times l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) & \longrightarrow & l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) \\ & ((x_n)_n, (y_n)_n) & \longmapsto & (x_n y_n)_n \end{array}$$

Estas funciones dotan a $l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p})$ de una estructura de anillo y de $\overline{\mathbb{Q}_p}$-espacio vectoral normado. Definamos el conjunto $\mathcal{U}$ como el ultrafiltro en $\mathbb{Z}^+$ conteniendo los subconjuntos $[n, +\infty) \subseteq \mathbb{Z}^+$.

Lema 2.4.1. *Dado $(x_n)_n \in l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p})$, $\lim\limits_{\mathcal{U}} |x_n|_p$ existe.*

Demostración. Es un resultado de topología. $\square$

Queremos construir un campo a partir de $l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p})$. Para ello vamos a definir el conjunto

$$\mathfrak{m} = \{(x_n)_n \in l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) : \lim_{\mathcal{U}} |x_n|_p = 0\}.$$

Lema 2.4.2. *El conjunto $\mathfrak{m}$ es ideal maximal $l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p})$.*

Demostración. Sean $(x_n)_n \in l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) \setminus \mathfrak{m}$ y $r = \lim_{\mathcal{U}} |x_n|_p > 0$. Luego,

$$A = \left\{n \in \mathbb{Z}^+ : ||x_n|_p - r| < \frac{r}{2}\right\} \in \mathcal{U}.$$

Por la desigualdad triangular, $0 < r/2 < |x_n|_p < 3r/2$ $\forall n \in A$. Definamos la secuencia $(y_n)_n$ como

$$y_n = \begin{cases} 1/x_n & , \; n \in A \\ 0 & , \; n \notin A \end{cases}$$

Se sigue que $|y_n| < 2/r$ $\forall n \in A$. Luego $(y_n)_n$ es una secuencia acotada y pertenece a $l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p})$. En inmediato, de la construcción, que $1 - x_n y_n = 0$ $\forall n \in A$. Entonces, $1 - (x_n)_n(y_n)_n \in \mathfrak{m}$. Esto implica que $l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) = (x_n)_n l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) + \mathfrak{m}$ para todo $(x_n)_n \in l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p}) \setminus \mathfrak{m}$. Por tanto $\mathfrak{m}$ es ideal maximal en $l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p})$. □

Denotaremos, $\Omega_p = l^\infty(\overline{\mathbb{Q}_p})/\,\mathfrak{m}$ y $[(x_n)_n] = (x_n)_n + \mathfrak{m}$. Pasaremos a definir un valor absoluto ultrámetrico en este campo

$$\begin{array}{rcccl} \|\cdot\| & : & \Omega_p & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ & & [(x_n)_n] & \longmapsto & \lim\limits_{\mathcal{U}} |x_n|_p. \end{array}$$

Lema 2.4.3. $(\Omega_p, \|\cdot\|)$ *es un campo ultramétrico extensión de* $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

Demostración. Vamor a probar que $\|\cdot\|$ es valor absoluto ultramétrico en Ω_p. Sean $x = [(x_n)_n], y = [(y_n)_n], z = [(z_n)_n] \in \Omega_p$.

a) $\|\cdot\|$ es bien definido: Sea $x = y$, es decir, $(x_n)_n - (y_n)_n \in \mathfrak{m}$. O lo mismo, $\lim_{\mathcal{U}} |x_n - y_n|_p = 0$. Dado $\epsilon > 0$

$$\{n \in \mathbb{Z}^+ : |x_n - y_n|_p < \epsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Como $||x_n|_p - |y_n|_p| \leq |x_n - y_n|_p$, entonces

$$\{n \in \mathbb{Z}^+ : |x_n - y_n|_p < \epsilon\} \subseteq \{n \in \mathbb{Z}^+ : ||x_n|_p - |y_n|_p| < \epsilon\}.$$

Como $\mathcal{U}$ es ultrafiltro,

$$\{n \in \mathbb{Z}^+ : ||x_n|_p - |y_n|_p| < \epsilon\} \in \mathcal{U}.$$

Esto implica que $\lim_{\mathcal{U}} |x_n|_p = \lim_{\mathcal{U}} |y_n|_p$. Esto significa que $\|\cdot\|$ no depende de la secuencia representante.

b) $\|x\| = 0 \iff x = 0$:

$$\|x\| = 0 \iff \lim_{\mathcal{U}} |x_n| = 0 \iff (x_n)_n \in \mathfrak{m} \iff x = [(x_n)_n] = 0.$$

c) $\|xy\| = \|x\|\|y\|$:

$$\|xy\| = \|[(x_n y_n)_n]\| = \lim_{\mathcal{U}} |x_n y_n|_p = \left(\lim_{\mathcal{U}} |x_n|_p\right)\left(\lim_{\mathcal{U}} |y_n|_p\right) = \|x\|\|y\|.$$

d) $\|x + y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$:

$$\|x + y\| = \|[(x_n + y_n)_n]\| = \lim_{\mathcal{U}} |x_n + y_n|_p \leq \lim_{\mathcal{U}} \max\{|x_n|_p, |y_n|_p\}$$

$$= \max\left\{\lim_{\mathcal{U}} |x_n|_p, \lim_{\mathcal{U}} |y_n|_p\right\} = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Así, hemos probado que $(\Omega_p, \|\cdot\|)$ es campo ultramétrico. □

Hemos terminado la construcción. Ahora, definiremos la función

$$\begin{array}{rccc} T & : & \overline{\mathbb{Q}_p} & \longrightarrow & \Omega_p \\ & & x & \longmapsto & [(x)_n] \end{array}$$

Proposición 2.4.1. *T es un homomorfismo isométrico de campos.*

Demostración. Sean $x, y \in \overline{\mathbb{Q}_p}$.

$$T(x + y) = [(x + y)_n] = [(x)_n + (y)_n] = [(x)_n] + [(y)_n] = T(x) + T(y),$$

$$T(xy) = [(xy)_n] = [(x)_n (y)_n] = [(x)_n][(y)_n] = T(x)T(y),$$

$$\|T(x)\| = \|[(x)_n]\| = \lim_{\mathcal{U}} |x|_p = |x|_p.$$

Esto prueba lo pedido. □

Mediante T podemos identificar $\overline{\mathbb{Q}_p}$ dentro de Ω_p y ver que los valor absolutos $|\cdot|_p$ y $\|\cdot\|$ son iguales en $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Así podemos ver $\overline{\mathbb{Q}_p}$ como subcampo de Ω_p y $\|\cdot\|$ como extensión de $|\cdot|_p$.

De esta manera hemos construido un nuevo campo valuado $(\Omega_p, \|\cdot\|)$ extendiendo al campo valuado $(\overline{\mathbb{Q}_p}, |\cdot|_p)$.

En lo que sigue, vamos a demostrar las propiedades de este campo.

Proposición 2.4.2. *Ω_p es algebraicamente cerrado.*

Demostración. Sea $f \in \Omega_p[X]$ polinomio mónico de grado $n \geq 1$. Escribamos

$$f(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Podemos escribir, $a_k = [(a_{k,i})_i]$ para cada $i = 0, \ldots, n-1$. Consideremos los polinomios

$$f_i(X) = X^n + a_{n-1,i}X^{n-1} + \ldots + a_{0,i} \in \overline{\mathbb{Q}_p}[X].$$

Como $\overline{\mathbb{Q}_p}$ es algebraicamente cerrado existen $x_i \in \overline{\mathbb{Q}_p}$ tal que

$$f_i(x_i) = x_i^n + a_{n-1,i}x_i^{n-1} + \ldots + a_{0,i} = 0.$$

Luego,

$$|x_i|_p^n = |x_i^n|_p = |-a_{n-1,i}x_i^{n-1} - \ldots - a_{0,i}|_p \leq |a_{0,i}| \leq \max_{i\geq 1}\{|a_{0,i}|_p\} < +\infty.$$

De donde $|x_i|_p \leq \sqrt[n]{\max_{i\geq 1}\{|a_{0,i}|_p\}} < +\infty$. Así, tenemos que la secuencia $(x_i)_i$ es acotada, lo que implica que $x = [(x_i)_i] \in \Omega_p$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \\
&= [(x_i)_i]^n + [(a_{n-1,i})_i][(x_i)_i]^{n-1} + \ldots + [(a_{0,i})_i] \\
&= [(x_i^n + a_{n-1,i}x_i^{n-1} + \ldots + a_{0,i})_i] \\
&= [(f_i(x_i))_i] \\
&= [(0)_i] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Se demuestra así que todo polinomio mónico en Ω_p tiene al menos una raíz en Ω_p. Por tanto Ω_p es algebraicamente cerrado. □

Lema 2.4.4. *Sean $x = [(x_n)_n] \in \Omega_p$ y $A \in \mathcal{U}$. Se cumple*

$$\|x\| = \inf_{(y_n)_n \in \mathfrak{m}} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{|x_n - y_n|_p\} \right\} \leq \sup_{n\in A} |x_n|_p.$$

Demostración. Probaremos tres desigualdades:

a) $\|x\| = \inf_{(y_n)_n \in \mathfrak{m}} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{|x_n - y_n|_p\} \right\}$:

Para cada $(y_n)_n \in \mathfrak{m}$ tenemos

$$\|x\| = \|[(x_n)_n]\| = \|[(x_n)_n - (y_n)_n]\| = \lim_{\mathcal{U}} |x_n - y_n|_p \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{|x_n - y_n|_p\}.$$

Aplicando $\inf_{(y_n)_n \in \mathfrak{m}}$ obtenemos

$$\|x\| \leq \inf_{(y_n)_n \in \mathfrak{m}} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{|x_n - y_n|_p\} \right\}.$$

b) $\inf_{(y_n)_n \in \mathfrak{m}} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{|x_n - y_n|_p\} \right\} \leq \sup_{n\in A} |x_n|_p$:

Definimos la secuencia

$$z_n^A = \begin{cases} 0 & , \ n \in A \\ x_n & , \ n \notin A \end{cases}$$

Claramente $(z_n^A)_n$ es una secuencia acotada, ya que $(x_n)_n$ es acotada, y pertenece a $\mathfrak{m}$, esto es, $\lim_{\mathcal{U}} \left| z_n^A \right|_p = 0$.

Entonces

$$\inf_{(y_n)_n \in \mathfrak{m}} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{|x_n - y_n|_p\} \right\} \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \left\{ |x_n - z_n^A|_p \right\} = \sup_{n\in A} |x_n|_p.$$

c) $\inf_{(y_n)_n \in \mathfrak{m}} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{|x_n - y_n|_p\} \right\} \leq \|x\|$:

Aplicando $\inf_{A\in\mathcal{U}}$ en el item b) tenemos

$$\inf_{(y_n)_n \in \mathfrak{m}} \left\{ \sup_{n\in\mathbb{Z}^+} \{|x_n - y_n|_p\} \right\} \leq \inf_{A\in\mathcal{U}} \left\{ \sup_{n\in A} |x_n|_p \right\} = \limsup_{\mathcal{U}} |x_n|_p = \lim_{\mathcal{U}} |x_n|_p = \|x\|.$$

Así hemos probado lo pedido. $\square$

Proposición 2.4.3. Ω_p *es esféricamente completo.*

Demostración. Sea $(B[x_n, r_n])_n$ una secuencia decreciente de bolas cerradas en Ω_p. Como Ω_p es ultramétrico y por la proposición 1.1.2,

$$B[x_{n+1}, r_{n+1}] \subseteq B[x_n, r_n] = B[x_{n+1}, r_n] \quad \forall m \geq n \geq 1,$$

lo que implica que $\|x_{n+1} - x_n\| \leq r_n$ y $r_{n+1} \leq r_n$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Podemos escribir $a_n = [(\alpha_{n,i})_i]$. Luego, por el lema 2.4.4,

$$\|x_{n+1} - x_n\| = \inf_{(\beta_i)_i \in \mathfrak{m}} \left\{ \sup_{i \in \mathbb{Z}^+} \{|\alpha_{n+1,i} - \alpha_{n,i} - \beta_i|_p\} \right\} \leq r_n < r_{n-1}.$$

Definimos $r_0 > 0$ arbitrariamente grande. Por propiedad del ínfimo, existe $(\gamma_{n,i})_i \in \mathfrak{m}$ tal que

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^+} \{|\alpha_{n+1,i} - \alpha_{n,i} - \gamma_{n,i}|_p\} < r_{n-1}$$

Por inducción sobre n, fijando $(\alpha_{n,i})_i$ podemos redefinir $(\alpha_{n+1,i})_i$ como $(\alpha_{n+1,i})_i - (\gamma_{n,i})_i$ ya que ambos son representantes de x_n. Entonces,

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}^+} \{|\alpha_{n+1,i} - \alpha_{n,i}|_p\} < r_{n-1}.$$

Se sigue,

$$|\alpha_{n+1,i} - \alpha_{n,i}|_p < r_{n-1} \quad \forall n, i \in \mathbb{Z}^+.$$

Dado $m \geq n$ y dado que $(r_n)_n$ es decreciente tenemos

$$\begin{aligned}
|\alpha_{m,i} - \alpha_{n,i}|_p &= |\alpha_{m,i} - \alpha_{m-1,i} + \alpha_{m-1,i} - \ldots - \alpha_{n+1,i} + \alpha_{n+1,i} - \alpha_{n,i}|_p \\
&\leq \max\{|\alpha_{m,i} - \alpha_{m-1,i}|_p, \ldots, |\alpha_{n+1,i} - \alpha_{n,i}|_p\} \\
&< \max\{r_{m-2}, \ldots, r_{n-1}\} \\
&= r_{n-1} \quad \forall i, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n.
\end{aligned}$$

Supongamos por ahora que la secuencia $(\alpha_{i,i})_i$ es acotada y define el elemento $x \in \Omega_p$. Luego, por el lema 2.4.4 y la desigualdad anterior,

$$\|x - x_n\| \leq \sup_{i \in [n, +\infty)} |\alpha_{i,i} - \alpha_{n,i}|_p \leq r_{n-1}.$$

Entonces,

$$\|x - x_n\| \leq \max\{\|x - x_{n+1}\|, \|x_{n+1} - x_n\|\} \leq \max\{r_n, r_n\} = r_n,$$

o lo que es lo mismo $x \in B[x_n, r_n]$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$. Esto implica que $(B[x_n, r_n])_n$ tiene intersección no vacía. Esto prueba que Ω_p es esféricamente completo.

Solo falta probar que $(\alpha_{i,i})_i$ es acotada. En efecto, recordemos que

$$|\alpha_{m,i} - \alpha_{n,i}|_p < r_{n-1} \quad \forall i, m, n \in \mathbb{Z}^+, m \geq n.$$

Haciendo $n = 1, m = i$, tenemos

$$|\alpha_{i,i} - \alpha_{1,i}|_p < r_0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}^+.$$

Recordemos que r_0 es fijo suficientemente grande. De la desigualdad triangular

$$|\alpha_{i,i}|_p < r_0 + |\alpha_{1,i}|_p \quad \forall i \in \mathbb{Z}^+.$$

Como la secuencia $(\alpha_{1,i})_i$ es acotada, sea $C > 0$ tal que $|\alpha_{1,i}|_p \leq C$ $\forall i \in \mathbb{Z}^+$. Luego

$$|\alpha_{i,i}|_p < r_0 + |\alpha_{1,i}|_p \leq r_0 + C \quad \forall i \in \mathbb{Z}^+.$$

Esto prueba que $(\alpha_{i,i})_i$ es acotada, como se quería. $\square$

En lo que sigue, el valor absoluto $\|\cdot\|$ pasará ser denotado como $|\cdot|_p$.

Corolario 2.4.1. Ω_p *no es segundo numerable.*

Demostración. Por la proposición 1.6.3, como Ω_p es esféricamente completo y $|\overline{\mathbb{Q}_p}|_p$ es denso en $[0, +\infty)$, Ω_p no puede ser segundo numerable. $\square$

Proposición 2.4.4. Ω_p *tiene cardinal* $\aleph_1$.

Demostración. A cada punto de $x \in \Omega_p$ le corresponde una (de muchas) secuencia $(x_n)_n$ en $\overline{\mathbb{Q}_p}$, que es diferente para cada $x \in \Omega_p$. Entonces

$$\aleph_1 = \text{cardinal}(\overline{\mathbb{Q}_p}) \leq \text{cardinal}(\Omega_p) \leq \text{cardinal}\left(\overline{\mathbb{Q}_p}^{\mathbb{Z}^+}\right) = \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1,$$

de donde cardinal$(\Omega_p) = \aleph_1$. $\square$

2.5 El campo $\mathbb{C}_p$, la compleción de $\overline{\mathbb{Q}_p}$

El campo valuado $\mathbb{C}_p$ es un subcampo de Ω_p, exactamente la compleción de $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Los campo $\mathbb{C}_p$ y $\mathbb{C}$, resultan ser isomorfismos como campos, sin embargo, sus topologías son diferentes.

Definición 2.5.1. Definimos el campo valuado $\mathbb{C}_p$ como la cerradura de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ en Ω_p con el valor absoluto restricto.

Proposición 2.5.1. $\mathbb{C}_p$ *es la compleción de* $\overline{\mathbb{Q}_p}$.

Demostración. Se sigue de la definición de $\mathbb{C}_p$ que $\mathbb{C}_p$ es extensión de $\overline{\mathbb{Q}_p}$, al igual que los valores absolutos respectivos, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ es denso en $\mathbb{C}_p$. $\mathbb{C}_p$, por ser cerrado del espacio completo Ω_p, es completo. Todo esto prueba lo pedido. □

Proposición 2.5.2. $\mathbb{C}_p$ *es segundo numerable.*

Demostración. Debido que, por la proposición 2.3.3, $\overline{\mathbb{Q}_p}$ es segundo numerable y denso en $\mathbb{C}_p$. □

Proposición 2.5.3. $\mathbb{C}_p$ *no es esféricamente completo.*

Demostración. Debido a la proposición 1.6.3, ya que $\mathbb{C}_p$ es segundo numerable y $|\overline{\mathbb{Q}_p}|_p$ es denso en $[0, +\infty)$. □

Corolario 2.5.1. $\mathbb{C}_p$ *no es localmente compacto.*

Demostración. Por proposición 1.6.2, localmente compacto implica esféricamente completo. Luego, como $\mathbb{C}_p$ no es esféricamente completo, entonces $\mathbb{C}_p$ no es localmente compacto. □

Observación 2.5.1. Recordemos que en un espacio métrico completo, todo cerrado es también completo. El campo Ω_p y el subcampo cerrado $\mathbb{C}_p$ son un ejemplo de que un cerrado de un espacio esféricamente completo no tiene porque ser esféricamente completo.

Proposición 2.5.4. $\mathbb{C}_p$ *es algebraicamente cerrado.*

Demostración. Usaremos que $(\mathbb{C}_p, |\cdot|_p)$ es un campo ultramétrico no discreto de característica 0. Sea $a \in \overline{\mathbb{C}_p}$ elemento algebraico de grado $n \geq 1$ sobre $\mathbb{C}_p$ y sea f su polinomio mónico irreducible sobre $\mathbb{C}_p$. Por densidad de $\overline{\mathbb{Q}_p}$ en $\mathbb{C}_p$ y la proposición 1.5.6 (continuidad de raíces), podemos escoger $g \in \overline{\mathbb{Q}_p}[X]$ de grado n suficientemente cerca de f tal que tiene una raíz $b \in \mathbb{C}_p(a)$ tal que $\mathbb{C}_p(b) = \mathbb{C}_p(a)$. Como $\overline{\mathbb{Q}_p}$ es algebraicamente cerrado, b es necesariamente en $\overline{\mathbb{Q}_p}$, así $\mathbb{C}_p(a) = \mathbb{C}_p(b) = \mathbb{C}_p$. Entonces $a \in \mathbb{C}_p$. Esto prueba que $\mathbb{C}_p$ es algebraicamente cerrado. $\square$

Lema 2.5.1. $\mathbb{C}_p$ *tiene cardinal* $\aleph_1$.

Demostración. Como $\overline{\mathbb{Q}_p} \subset \mathbb{C}_p \subset \Omega_p$ y cardinal$(\overline{\mathbb{Q}_p})$ = cardinal$(\Omega_p) = \aleph_1$, se sigue lo pedido. $\square$

Proposición 2.5.5. $\mathbb{C}$ *y* $\mathbb{C}_p$ *son campos isomorfos.*

Demostración. Sea S y T bases de trascendencia de $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}_p$ sobre $\mathbb{Q}$, respectivamente. Note que S y T deben tener cardinal $\aleph_1$, el mismo que $\mathbb{C}$ y $\mathbb{C}_p$. Se sigue que $\mathbb{Q}(S)$ y $\mathbb{Q}(T)$ son isomorfos. Pasando a la clausura algebraica, debemos tener que $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{Q}(S)}$ y $\mathbb{C}_p = \overline{\mathbb{Q}(T)}$ son isomorfos. $\square$

Proposición 2.5.6. Ω_p *no es localmente compacto.*

Demostración. Usaremos sucesivamente 1.2.4. Supongamos que Ω_p es localmente compacto. Entonces $\mathcal{O}_{\Omega_p}$ es compacto. Como $\mathbb{C}_p$ es completo, tenemos que $\mathbb{C}_p$ es un cerrado de Ω_p. Luego, el subconjunto cerrado $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p} = \mathcal{O}_{\Omega_p} \cap \mathbb{C}_p$ de $\mathcal{O}_{\Omega_p}$ es compacto. Lo que implica que $\mathbb{C}_p$ es localmente compacto. Contradicción. Por tanto Ω_p no es localmente compacto. $\square$

Capítulo 3

Conclusiones

- En este trabajo realizamos las construcciones

$$
\begin{tikzcd}
(\mathbb{Q}, |\cdot|_p) \arrow[r, "\text{compleción}"] & \mathbb{Q}_p \arrow[r, "\text{clausura algebraica}"] & \overline{\mathbb{Q}_p} \arrow[r, "\text{compleción esférica}"] \arrow[dr, "\text{compleción}"] & \Omega_p \\
 & & & \mathbb{C}_p \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}
$$

- Resumiremos los resultados principales en la siguiente tabla.

Tabla 1

Cuadro resumen de resultados principales.

$(\mathbb{K}, \| \|)$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}_p$	$\overline{\mathbb{Q}_p}$	$\mathbb{C}_p$	Ω_p
¿Es algebraicamente cerrado?	NO	NO	SI	SI	SI
¿Es completo?	NO	SI	NO	SI	SI
¿Es esféricamente completo?	NO	SI	NO	NO	SI
¿Es localmente compacto?	NO	SI	NO	NO	NO
¿Qué cardinal tiene?	$\aleph_0$	$\aleph_1$	$\aleph_1$	$\aleph_1$	$\aleph_1$
¿Es segundo numerable?	SI	SI	SI	SI	NO
¿Subconjunto numerable denso?	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}$	$\overline{\mathbb{Q}}$	$\overline{\mathbb{Q}}$	

- Según la tabla 1, basta las propiedades algebraicamente cerrado, completo y esféricamente completo para distingir los campos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$, $\overline{\mathbb{Q}_p}$, $\mathbb{C}_p$ y Ω_p; pero son iguales para $\mathbb{Q}_p$ y $\mathbb{R}$, y también para Ω_p y $\mathbb{C}$.

- Podemos ver que $\mathbb{R}$ tiene las mismas respuestas a las preguntas, como $\mathbb{Q}_p$. Pero, a diferencia de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}_p$ es totalmente disconexo, por la proposición 1.1.2. Además $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}_p$ no son campos isomorfos, por la proposición 2.2.5.

- El campo $\mathbb{C}_p$ resulto ser isomorfo como campo a $\mathbb{C}$. Existe el análisis en $\mathbb{C}_p$, que tiene resultados en paralelo con el análisis complejo.

- Por el corolario 1.6.1, todo espacio métrico esféricamente completo es completo completo. El recíproco no es cierto, ejemplo: $\mathbb{C}_p$.

- Por la proposición 1.6.2, todo campo localmente compacto es esféricamente completo. El recíproco no es cierto, ejemplo; Ω_p.

- Por la proposición 1.6.3, un campo ultramétrico segundo numerable $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ con $|\mathbb{K}|$ denso en $[0, +\infty)$ no es esféricamente completo. La condición "$|\mathbb{K}|$ denso en $[0, +\infty)$" no puede ser evitada, ejemplo: $\mathbb{Q}_p$ es segundo numerable, esféricamente completo y, por el lema 2.2.1, $|\mathbb{Q}_p|_p = p^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$; y $\mathbb{Q}$ es segundo numerable, no esféricamente completo y $|\mathbb{Q}|_p = p^{\mathbb{Z}} \cup \{0\}$.

- Nuevamente, en la proposición 1.6.3, la condición "ultramétrico" no puede ser evitada, ya que $\mathbb{R}$ es segundo numerable, esféricamente completo y $|\mathbb{R}| = [0, +\infty)$.

- Se cumple que todo cerrado de un espacio métrico completo es también completo. Esto no es cierto para espacios métricos esféricamente completos. En efecto, Ω_p es esféricamente completo, pero $\mathbb{C}_p$ a pesar de ser cerrado en Ω_p, $\mathbb{C}_p$ no es esféricamente completo.

Bibliografía

[1] Bourbaki, N. (1987). *General topology.* Elements of Mathematics. Berlin: Springer-Verlag.

[2] Cohen, L. W. and Ehrlich, G. (1963). *The structure of real number system.* New York: Van Nostrand.

[3] Escassut, A. (1995). *Analytic elements in p-adic analysis.* Singapore: World Scientific.

[4] Fraleigh, J. B. (1982). *A first course in abstract algebra* (3rd ed.). Massachusetts: Addison-Wesley.

[5] Knapp, A. W. (2016). *Basic algebra* (Digital 2nd ed.). New York.

[6] Koblitz, N. (1984). *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions* (2nd ed.). New York: Springer-Verlag.

[7] McCarthy, P. J. (1991). *Algebraic extensions of fields.* New York: Dover Publications.

[8] Robert, A. M. (2000). *A course in p-adic analysis.* New York: Springer-Verlag.

[9] Schikhof, W. H. (2006). *Ultrametric calculus - an introduction to p-adic analysis.* New York: Cambridge University Press.

[10] Villa, G. D. (2005). *Introducción a la teoría de las funciones algebraicas.* España: Fondo de Cultura Económica.